

Vocabulaire de la topologie usuelle

Nous proposons dans cette fiche une synthèse des termes de topologie (usuelle) utilisés, ainsi que des concepts initiant aux études de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} (on prendra $n \in \mathbb{N}^*$).

Attention ! Seuls quelques éléments de topologie restent actuellement au programme du concours D2. Nous proposons ici un supplément correspondant à l'ancien programme. Il peut apporter une meilleure compréhension.

Quelques Généralités

Dans cette section, E désigne un ensemble non vide. Il est essentiel de connaître ces définitions dans le cas $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

▽ **Distance** : Application de $E \times E$ dans \mathbb{R}_+ vérifiant :

- i) $\forall x \in E \forall y \in E \quad d(x; y) = 0 \iff x = y$ (Axiome de Séparation)
- ii) $\forall x \in E \forall y \in E \quad d(x; y) = d(y; x)$ (Axiome de Symétrie)
- iii) $\forall x \in E \forall y \in E \forall z \in E \quad d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$ (Inégalité Triangulaire)

Remarque : La définition impose que $d(x; y) \geq 0$ pour tous $(x; y) \in E^2$

▽ **Espace Métrique** : Tout ensemble E muni d'une distance d associée. On le note $(E; d)$.

Métrique de \mathbb{R}^n

Dans cette section, on considère que $E = \mathbb{R}^n$ et on note d une distance associée de sorte que l'espace métrique considéré (implicitement ou non) soit $(\mathbb{R}^n; d)$.

□ **Boule Ouverte** : Etant donné un centre $a \in E$ et un rayon $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble défini comme :

$$B(a; r) = \{x \in E \mid d(x; a) < r\}$$

□ **Boule Fermée** : Etant donné un centre $a \in E$ et un rayon $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble défini comme :

$$B_F(a; r) = \{x \in E \mid d(x; a) \leq r\}$$

□ **Ensemble Ouvert** : Tout ensemble $\mathcal{O} \subset E$ étant l'union (quelconque) de boules ouvertes.

□ **Ensemble Fermé** : Tout ensemble $F \subset E$ étant complémentaire d'un ensemble ouvert.

▽ **Intérieur** : L'intérieur $\text{int}(A)$ d'une partie A de E est défini comme : "Le plus grand ouvert inclus dans A "

On peut le décrire formellement comme :

$$\text{int}(A) = \bigcup_{\substack{\mathcal{O} : \text{ouvert} \\ \mathcal{O} \subset A}} \mathcal{O}$$

▽ **Adhérence** : L'adhérence (ou fermeture) \overline{A} d'une partie A de E est définie comme : "Le plus petit fermé contenant A "

On peut le décrire formellement comme :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F : \text{fermé} \\ A \subset F}} F$$

▽ **Frontière** : La frontière $Fr(A)$ ou encore ∂A d'une partie A de E est définie comme $Fr(A) = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$

Convexité dans \mathbb{R}^n

On considère $E = \mathbb{R}^n$ en tant qu'espace vectoriel dans cette section, avec $n \in \mathbb{N}^*$

□ **Segment** : Si x et y sont deux éléments de E alors le segment de bornes x et y respectivement est défini comme :

$$[x; y] = \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y ; \lambda \in [0; 1]\}$$

Remarque : Si x et y sont réels avec $x \leq y$, on retrouve l'intervalle fermé, borné de \mathbb{R} . Attention ! L'absence d'ordre naturel total sur $E = \mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel rend caduque l'hypothèse $x \leq y$ en toute généralité et ainsi, la définition ci-dessus de $[x; y]$ coïncide avec celle de $[y; x]$

□ **Partie Convexe** : Une partie C de E est dite convexe lorsqu'elle vérifie :

$$\forall x \in C \forall y \in C \quad [x; y] \subset C$$

▽ **Cône Vectoriel** : Défini comme partie C stable par multiplication scalaire dans \mathbb{R}^n :

$$\forall x \in E \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad x \in C \implies \lambda \cdot x \in C$$

Remarque : Etend la notion géométrique de cône (définissable par sommet et base) mais permet une exploitation formelle et algébrique puissante.

▽ **Cône Vectoriel Positif** : Défini comme partie C stable par multiplication par scalaire positif dans \mathbb{R}^n :

$$\forall x \in E \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad x \in C \implies \lambda \cdot x \in C$$

Remarque : On peut envisager de définir les notions de *Cône Vectoriel Strictement Positif*, *Cône Vectoriel Négatif*, *Cône Vectoriel Strictement Négatif*.

▽ **Cône Convexe** : Partie qui est un cône vectoriel et une partie convexe à la fois dans $E = \mathbb{R}^n$.

On peut décliner en *cône convexe (strictement) positif*

▽ **Enveloppe Convexe** : L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A)$ ou encore $\text{Hull}(A)$ d'une partie A de E est définie comme : " la plus petite partie convexe de E contenant A ".

$$\text{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{C : \text{convexe} \\ A \subset C}} C$$

▽ Fonctions de type $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ avec n et k deux entiers naturels non nuls, peut être vue comme :

$$f : (x_1 ; \dots ; x_n) \mapsto (y_1 ; \dots ; y_k)$$

et on peut définir ses *fonctions partielles* notées f_i comme applications de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f_i : (x_1 ; \dots ; x_n) \mapsto y_i = f_i(x_1 ; \dots ; x_n)$$

où $1 \leq i \leq k$.

Souvent, on étudie une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ sur un ouvert \mathcal{D} sur lequel f est bien définie. Les fonctions partielles associées peuvent alors aussi être définies sur \mathcal{D} .

Fonctions de type $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Les applications partielles f_i de $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$) et leurs propriétés permettent de ramener l'étude d'une telle fonction f à celles-ci.

Pour φ définie sur un ouvert \mathcal{D} de \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R} , on peut définir ses *applications partielles* φ_i en le point $A = (a_1 ; \dots ; a_n)$ comme étant les fonctions :

$$\varphi_{A,i} : x_i \mapsto \varphi(a_1 ; \dots ; a_{i-1} ; x_i ; a_{i+1} ; \dots ; a_n)$$

Remarques : Le terme *Application Partielle* peut donc renvoyer, contextuellement, à des objets différents. Certains énoncés de théorèmes lus dans divers ouvrages peuvent alors apparaître contradictoires : ils relèvent de l'usage d'une même expression (*application partielle*) pour des objets différents (et ont donc des propriétés différentes).

Voir le document *extrait livre* pour un exemple.