

Analyse dans \mathbb{R}^n

Exercice 7 Comparaison pour la factorielle

1. La fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* donc on peut exploiter l'inégalité de concavité généralisée pour toute familles $(x_1 \dots x_n)$ d'éléments de \mathbb{R}_+^* et $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ avec $\sum_{k \leq n} \lambda_k = 1$:

$$\ln \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln(x_k)$$

ce qui donne, avec $\lambda_k = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_k)$$

encore réécrit :

$$\frac{\sum_{k=1}^n \ln(x_k)}{n} \leq \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right)$$

et, par propriété algébrique de \ln :

$$\ln \left((x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \right) \leq \ln \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)$$

Le résultat attendu étant obtenu par passage à l'exponentielle des deux membres (\exp est croissante sur \mathbb{R}).

2. De 1. écrit avec $a_1 \dots a_n$ au lieu de $x_1 \dots x_n$ et en passant à l'inverse, on trouve (sous conditions analogues) :

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n a_k}$$

En posant $x_k = \frac{1}{a_k}$ ayant $a_k \neq 0$ on obtient :

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \geq \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}$$

3. On reprend l'inégalité de 1. et on considère $x_k = k \leq n$ de sorte que $(n!)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1+2+\dots+n}{n} \right)^n$ d'où l'on tire, en passant les deux membres à la puissance n (l'application $x \mapsto x^n$ est croissante sur \mathbb{R}_+^*) :

$$n! \leq \left(\frac{1+2+\dots+n}{n} \right)^n = \left(\frac{n(n+1)}{2n} \right)^n = \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$$