.

# Lois à densité particulières : corrigés

**Exercice $\boxed{5}$ caractérisation de la durée de vie sans vieillissement (DVSV** On se permettra de désigner la proprité de *durée de vie sans vieillissement* au moyen du sigle $DVSV$.

1. On pose donc $t \geq 0$ et $h \geq 0$ et on calcule :

$$\begin{aligned}
F_X(t+h) = F_X(t) + F_X(h) - F_X(h)F_X(t) &= \mathbb{P}[X \leq t] + \mathbb{P}[X \leq h] - \mathbb{P}[X \leq h] \cdot \mathbb{P}[X \leq t] \\
&= \mathbb{P}[X \leq h]\,(1 - \mathbb{P}[X \leq t]) + \mathbb{P}[X \leq t] \\
&= \mathbb{P}[X \leq h]\mathbb{P}[X > t] + 1 - \mathbb{P}[X > t] \\
&= \mathbb{P}[X > t]\,(\mathbb{P}[X \leq h] - 1) + 1 \\
&= 1 - \mathbb{P}[X > t] \cdot \mathbb{P}[X > h] \\
&= 1 - \mathbb{P}_{[X>h]}[X > t+h] \cdot \mathbb{P}[X > h] \quad \text{selon la propriété DVSV} \\
&= 1 - \mathbb{P}\left([X > t+h] \cap [X > h]\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left([X > t+h]\right) \\
&= \mathbb{P}[X \leq t+h] = F_X(t+h)
\end{aligned}$$

2. On va simplement utiliser l'écriture du taux d'accroissement de $F_X$ entre $t$ et $t+h$ dont la limite (quand $h$ tend vers 0) est par définition la valeur de $f_X(t) = F'_X(t)$. Pour $t > 0$ et $h$ au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{h} &= \frac{F_X(h) - F_X(h)F_X(t)}{h} \\
&= \frac{F_X(h)(1 - F_X(t))}{h} \\
&= \frac{F_X(h) - 0}{h}(1 - F_X(t)) \quad \text{comme } F_X(0) = \mathbb{P}[X \leq 0] = 0 \\
\implies f_X(t) &= \lim_{x \to 0} \frac{F_X(h) - 0}{h}(1 - F_X(t)) = f'_X(0)(1 - F_X(t)) = -f'_X(0)(F_X(t) - 1)
\end{aligned}$$

   quitte à détailler $\mathbb{P}[X \leq 0] = \mathbb{P}[X < 0] + \mathbb{P}[X = 0] = 0 + 0 = 0$ (support $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et $X$ à densité)

3. On commence par observer que la fonction nulle $O$ est bien solution de $(E_a)$ puisque $O' = O = -a \cdot O$.
   Par ailleurs, si $f$ et $g$ sont deux solutions de $(E_a)$ et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé ($a$ ayant été donné au préalable) on a que :

$$(f + \lambda \cdot g)' = f' + \lambda \cdot g' = -a \cdot f + \lambda(-a \cdot g) = -a\,(f + \lambda \cdot g)$$

   ce qui montre les stabilités requises. Ainsi, $\mathcal{E}_a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, ce qui achève la démonstration.

4. La fonction $F_X - 1$ ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}_+$ ($F_X$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité de support $\mathbb{R}_+$ donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de limite 1, montrant que $F_X(t) - 1 < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).
   On a alors $F_X - 1$ de dérivée $F'_X = f_X$ et en posant $a = -f_X(0)$ on a, d'après **2.** que $(F_X - 1)' = f_X = -f_X(0) \cdot (F_X - 1)$ d'où $F_X - 1 \in \mathcal{E}_a$.
   On vérifie finalement que $G(0) = F_X(0) - 1 = 0 - 1 = -1$.

5. La valeur de $a$ étant fixée, si $Y \in \mathcal{E}_a^*$, alors observons que $Y$ ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}_+$. En effet, nous avons :

$$\forall t \geq 0 \quad (Y(t)Y(-t))' = Y'(t)Y(-t) - Y'(-t)Y(t) = -aY(t)Y(-t) + aY(t)Y(-t) = 0$$

   Ce qui fait de $t \mapsto Y(t)Y(-t)$ une fonction constante. Or, si elle était nulle, on aurait $Y$ elle-même nulle (comme continue) et ainsi on obtient que les valeurs de $Y(t)$ ne sont jamais nulles pour $t \geq 0$.

Ainsi, comme $\dfrac{Y'(t)}{Y(t)} = -a\dfrac{Y(t)}{Y(t)} = -a$ pour tout $t \geq 0$, on peut écrire que :

$$\forall x \geq 0 \int_0^x \frac{Y'(t)}{Y(t)}\,dt = -a\int_0^x \,dt = -ax \quad \Longrightarrow \quad [\ln|Y(t)|]_0^x = -ax$$

ce que l'on peut réécrire $\forall t \geq 0 \quad \ln|Y(t)| - \ln|Y(0)| = -at$. En notant $\ln|Y(0)|$ la valeur $C^{te}$ on obtient le résultat attendu.

6. Nous trouvons que toute fonction $F_X$ de répartition d'une variable aléatoire à densité et possédant la propriété DVSV est solution d'une équation de type $(Y-1)' = -Y'(0)(Y-1)$ donc, ne pouvant être nulle, vérifiant :

$$|F_X(t) - 1| = \exp\left(-f_X(0)t + k\right) = e^k \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \Longrightarrow \quad F_X(t) = 1 \pm e^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

La positivité de $F_X$ et de la fonction $\exp$ permettent d'établir que, finalement, on a $\forall t \geq 0 \;\; F_X(t) = 1 - e^k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$.
Il reste à établir que la constante $k$ est nulle. En effet, $0 = F_X(0) = 1 - e^k \times 1$ donc $e^k = 1$ et ainsi $k = 0$.
Ce qui permet de reconnaître la fonction de répartition (caractéristique) d'une loi exponentielle sur $\mathbb{R}_+$ et d'aboutir ainsi à la réciproque annoncée.

## Applications concrètes

**Exercice** $\boxed{6}$ Cette question est liée à la notion de *demi-vie* ou encore de *médiane* d'une variable aléatoire à densité.
Nous allons répondre dans le cas général puis appliquer pour $N = 10$ (en années). On cherche ainsi, avec $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $\lambda > 0$, la valeur de $N \in \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\mathbb{P}[X \leq N] = \frac{1}{2} \iff 1 - e^{\lambda N} = \frac{1}{2} \iff e^{-\lambda N} = \frac{1}{2} \iff -\lambda N = -\ln 2$$

et ainsi, on trouve $\boxed{N = \dfrac{\ln 2}{\lambda}}$. dans le cas général.

Pour la situation d'origine, on a $\mathbb{E}[X] = 10$ soit $\dfrac{1}{\lambda} = 10$ d'où $N = 10\ln 2 \approx 6,93$ ce qui correspond à 6 ans, 11 mois et une semaine (environ).

**Exercice** $\boxed{7}$ Nous proposons de ramener le problème à la considération des deux années sur lesquelles portent l'extension de garantie.
En effet, lors des trois premières années, les deux scenarii *avec* ou *sans* extension de garantie sont pareillement couverts. Au-delà de cinq ans, il en est de même.
Nous allons devoir estimer le coût *attendu* de l'absence de garantie entre 3 et 5 ans. Comme $T$ suit la loi exponentielle, elle possède la propriété DVSV. Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}_{[T>3]}[T > 5] = \mathbb{P}[T > 2] \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}_{[T>3]}[T \leq 5] = \mathbb{P}[T \leq 2] = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,283$$

étant donné que $\mathbb{E}[T] = 6$ (en années) soit encore $\dfrac{1}{\lambda} = 6$ d'où $\lambda = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi, la variable aléatoire de Bernoulli $X$ qui vaut $0$ si l'extension de garantie n'est pas utilisée et $1$ si l'extension de garantie est utilisée produit une valeur espérée de gain $G$ donnée par :

$$G = 250X - 25 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}[G] = 250\mathbb{E}[X] - 25 = 250\mathbb{P}[X = 1] - 25 \approx 45,75$$

Ainsi, en moyenne, sur la période de deux années couvertes par l'extension de garantie, on sera amené à obtenir 40,75 euros de gains en ayant pris cette extension de garantie. Il apparaît donc rentable de la considérer.
On peut remarquer que, dans cette démarche, le seuil de rentabilité est de 70,75 euros. Le fait de modifier l'espérance de vie de l'appareil ainsi que les durées initiales et d'extension de garantie peuvent modifier très sensiblement les valeurs résultantes et donc la décision finale.

En aucun cas nous n'affirmons qu'il est toujours rentable de prendre la-dite extension et conseillons tout lecteur à bien prendre en considération ces éléments (au moins) avant toute prise (réfléchie) de décision.