

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice I

On définit la fonction f à deux variables réelles par $f(x; y) = x \ln x + y \ln y$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ le plus grand sur lequel on peut définir f et démontrer qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier le plus complètement possible la fonction $h : x \mapsto f(x; 1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etablir que f admet un gradient et une hessienne en tout point de $\mathcal{D}$.
4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f
5. On suppose ici que f réalise un extremum local en un certain point $(x_0; y_0)$ de $\mathcal{D}$.
Démontrer qu'alors $x_0 = y_0$ et précisez l'ensemble des valeurs (communes) possibles associées.
6. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f
7. Ecrire la formule de Taylor de développement limité d'ordre 2 au voisinage du point $(\frac{1}{e}; \frac{1}{e})$
8. Peut-on dire que f réalise en le point $(e^{-1}; e^{-1})$ un minimum local ? un maximum local ?
9. Finalement, démontrer que f admet un minimum global en un point que l'on déterminera.

Exercice II

Pour tout réel $r \geq 1$ on définit une fonction f_r sur $[0; 1[$ par :

$$f_r(x) = \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}}$$

et on posera :

$$I(r) = \int_0^1 f_r(x) \, dx$$

1. Dresser le tableau des variations de f_r .
2. Vérifier que $I(r)$ est bien une intégrale convergente pour tout réel $r \geq 1$.
3. On définit à présent, pour tout $r \geq 1$ les quantités $I_1(r)$, $I_2(r)$ et $I_3(r)$ par :

$$I_1(r) = \int_0^{r^{-2/3}} e^{-rx} \, dx \quad ; \quad I_2(r) = \int_0^{r^{-2/3}} \left((1-x)^{-1/2} - 1 \right) e^{-rx} \, dx \quad ; \quad I_3(r) = \int_{r^{-2/3}}^1 f_r(x) \, dx$$

- (a) Vérifier que l'on a, pour tout $r \geq 1$: $I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)$.
- (b) Démontrer que, pour r au voisinage de $+\infty$ on a $I_1(r) = \frac{1}{r}(1 + o(1))$

(c) Etablir, pour $y \in]0; 1[$, l'encadrement :

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leq 1 + \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}$$

(d) Démontrer qu'il existe une constante que l'on notera c_2 qui vérifie :

$$\forall r \geq 1 \quad 0 \leq I_2(r) \leq c_2 \left(1 - r^{-2/3}\right)^{-3/2} \frac{1}{r^{4/3}}$$

(e) Démontrer qu'il existe une constante que l'on notera c_3 qui vérifie :

$$\forall r \geq 1 \quad 0 \leq I_3(r) \leq c_3 \exp\left(-r^{1/3}\right)$$

4. Etablir finalement que l'on a :

$$I(r) \sim \frac{1}{r} \quad (r \rightarrow +\infty)$$

Exercice III

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$.

On définit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie comme $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On note enfin X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $AX_n = X_{n+1}$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n on a $X_n = A^n X_0$
3. Déterminer les valeurs propres de A puis établir que A est diagonalisable.
4. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.
5. Expliciter A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire une écriture explicite de u_n en fonction de u_0, u_1 et de $n \in \mathbb{N}$.

Problème

Soit $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_n\}$ un ensemble fini où $n \in \mathbb{N}^*$ désigne son cardinal.

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega))$. On notera $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ et on rappelle qu'alors, tout $E \subset \Omega$ est un événement et on définit, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, l'indicatrice de A notée $\mathbb{1}_A$ comme application de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Questions préliminaires :

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$? On ne demande pas de justification
2. Justifier que, si $\mathcal{A} = \{A_1; \dots; A_k\}$ (où $k \geq 1$) est une partition de Ω , alors $\mathcal{A}$ peut être vu comme un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$.
La réciproque est-elle vraie ?
3. Etablir que le nombre de partitions de Ω à $k = 2$ événements de Ω est $\frac{1}{2} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$ puis exprimer cette quantité plus simplement.
4. Justifier que, pour tout $A \subset \Omega$, l'application $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$
5. Démontrer que pour tout $(A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ on a $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ (produit)
6. Etablir que, pour tout $A \subset \Omega$, on a $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$
7. Montrer que pour toutes parties A et B de Ω , les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $\text{cov}(\mathbb{1}_A; \mathbb{1}_B) = 0$

Partie A : mettre de l'ordre dans les partitions de l'univers

On définit pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ une relation binaire notée $\propto$ par :

$$\mathcal{A} \propto \mathcal{B} \iff \forall E \in \mathcal{B} \quad \exists F \in \mathcal{A} \quad E \subset F$$

1. *Un exemple :*

On considère dans cette question *uniquement* que $\Omega = \{a; b; c; d; e\}$ et on pose $\mathcal{G} = \{\{a; b; c\}; \{d; e\}\}$ et $\mathcal{H} = \{\{a; b; c\}; \{a; b\}; \{d; e\}; \{c\}; \{d\}; \{e\}\}$.

- (a) Démontrer que $\mathcal{G} \propto \mathcal{H}$
 - (b) Démontrer que $\mathcal{H} \propto \mathcal{G}$
 - (c) A-t-on $\mathcal{G} = \mathcal{H}$?
2. Démontrer (en toute généralité) que $\propto$ est réflexive et transitive.
 3. La relation $\propto$ est-elle toujours une relation d'ordre ? Justifier.
 4. On définit à présent la relation binaire $\preceq$ comme *la restriction* de $\propto$ aux seules partitions de Ω , et *par convention*, on *supprimera toute occurrence de l'ensemble $\emptyset$ des partitions considérées*.
On peut écrire $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, et seulement si :
 - $\mathcal{A}$ est une partition de Ω
 - $\mathcal{B}$ est une partition de Ω
 - $\mathcal{A} \propto \mathcal{B}$ est vérifié.
 - $\emptyset \notin \mathcal{A}$ et $\emptyset \notin \mathcal{B}$
 - (a) Démontrer que $\preceq$ ainsi définie est une relation d'ordre
 - (b) La relation d'ordre $\preceq$ est-elle totale ?
 - (c) Justifier que l'ensemble des partitions de Ω possède, pour $\preceq$ un plus petit et un plus grand élément que l'on identifiera.

Partie B : Il est très (vector) space cet univers

Pour tout couple $(X; Y)$ de variables aléatoires réelles définies sur Ω , on définit le réel noté $\langle X; Y \rangle$ par :

$$\langle X; Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$$

et on définit les applications *partielles* associées $\varphi_X : Y \mapsto \mathbb{E}[XY]$ ainsi que $\psi_Y : X \mapsto \mathbb{E}[XY]$

1. Démontrer que l'ensemble des variables aléatoires à valeurs réelles sur Ω est un espace vectoriel que l'on notera $\mathcal{E}$.
2. (a) Soit $X \in \mathcal{E}$ fixé. Identifier les ensembles de départ et d'arrivée de φ_X .
(b) Etablir que, pour tout $X \in \mathcal{E}$, φ_X est linéaire.
(c) Vérifier que, pour tout $(X; Y)$ de $\mathcal{E}$ on a $\varphi_X(Y) = \psi_Y(X)$.
(d) L'application ψ_Y est-elle linéaire pour toute $Y \in \mathcal{E}$? Justifier.
(e) Justifier que, pour tout $X \in \mathcal{E}$ on a $\langle X; X \rangle \geq 0$. L'application $m : X \mapsto \langle X; X \rangle$ est-elle linéaire ?
3. Dans cette question, on suppose que les variables aléatoires réelles X et Y définies sur Ω sont centrées.
Donner une relation liant $\langle X; Y \rangle$ et $cov(X; Y)$.

Dans la suite du problème, on suppose que l'on a $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

4. Démontrer que, pour toute $X \in \mathcal{E}$ non nulle on a $\langle X; X \rangle > 0$.

Dans la suite, on écrira $\|X\| = \sqrt{\langle X; X \rangle}$ pour tout $X \in \mathcal{E}$.

De plus, si x est un réel, on pourra confondre (en termes de notations) la variable aléatoire (de $\mathcal{E}$) constante égale à x avec x lui-même.

5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ donné, on définit la condition $(\mathcal{C})$ par :

$$(\mathcal{C}) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \|X - \lambda\|^2 \leq \|X - x\|^2$$

L'objet de cette question est déterminer les réels λ vérifiant la condition $(\mathcal{C})$.

- (a) Démontrer que la condition $(\mathcal{C})$ est vérifiée si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x\mathbb{E}[X] + 2\lambda\mathbb{E}[X] - \lambda^2 \geq 0$$

- (b) En étudiant le trinôme du second degré (en x) ci-dessus, montrer que la condition $(\mathcal{C})$ est vérifiée si, et seulement si, λ vérifie l'équation :

$$\mathbb{E}[X]^2 - 2\lambda\mathbb{E}[X] + \lambda^2 = 0$$

- (c) En déduire que la condition $(\mathcal{C})$ est vérifiée si, et seulement si, $\lambda = \mathbb{E}[X]$.

[D'après cross over ensD2 2008 X ensD2-2010]