

Partie 4 : La simulation numérique

Chapitre 4

Interpolation polynomiale de Lagrange

1. Introduction : Interpoler une fonction

Si on a le problème suivant : on dispose d'un tableau de nombres issus d'un calcul, et on veut connaître la fonction qui lie ces points. L'interpolation peut être une solution à ce problème.

Que veut dire interpolation ?

Supposons donc que les couples de mesures dont nous disposons (x_i, y_i) soient des points représentatifs de la courbe d'une fonction f que nous cherchons à déterminer. Nous allons interpoler cette fonction f , c'est-à-dire l'approcher par un polynôme, en s'arrangeant pour que la courbe représentative de ce polynôme passe par tous les points (x_i, y_i) de notre tableau.

Il existe de nombreuses méthodes d'interpolation polynomiale. Nous étudions les *polynômes de Lagrange*.

2. Principe de l'interpolation polynomiale de Lagrange :

Pour construire les points de la courbe approchée de f par l'interpolation polynomiale à partir de $n + 1$ points $M_i(x_i, y_i) \forall i, 0 \leq i \leq n$ (avec les x_i distincts deux à deux), il suffit de calculer à chaque fois la valeur d'un polynôme à un x donné $p(x)$.

Comment le faire ?

1) Il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à n qui aux abscisses x_i prend les valeurs y_i :

$$\forall i, 0 \leq i \leq n, \quad P(x_i) = y_i$$

- P : **polynôme d'interpolation** aux points x_i pour les mesures y_i ;
- x_i : nœuds ou **points d'interpolations** ;
- y_i : $y_i = f(x_i)$ représentent les **valeurs interpolées** ;

2) P au point x s'écrit sous la forme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \text{ avec } l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Les l_i sont les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré n pour tout i :

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

Ainsi le polynôme de Lagrange au point x se calcule par la formule générale suivante :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0 \text{ et } j \neq i}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Exemple :

Pour les points $(x_0 = 1, y_0 = 3)$, $(x_1 = -1, y_1 = 2)$, $(x_2 = 2, y_2 = -1)$, on calcule d'abord les polynômes de Lagrange :

$$l_0(X) = \frac{(X+1)(X-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(X^2 - X - 2)$$

$$l_1(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(X^2 - 3X + 2)$$

$$l_2(X) = \frac{(X-1)(X+1)}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3}(X^2 - 1)$$

Puis on calcule la fonction polynomiale passant par ces points :

$$P(X) = 3l_0(X) + 2l_1(X) - l_2(X)$$

$$P(X) = -\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 4$$

3. Algorithme python de l'interpolation de Lagrange :

Données de l'algorithme :

- Le vecteur $X = (x_0, \dots, x_n)$ formé des points d'interpolation ;
- Le vecteur $Y = (y_0, \dots, y_n)$ formé des valeurs d'interpolations ;
- Le point réel x auquel le polynôme se calcule ;

Résultat : estimation au point x

Travail à faire :

- 1) Ecrire une fonction python **produit** qui retourne le produit des éléments d'une séquence S donnée.
- 2) Ecrire une fonction python **interpolation_Lagrange** qui permet d'implémenter la méthode de Lagrange et retourne une estimation du polynôme de lagrange au point x donné.
- 3) Lors d'une expérience, les mesures de la masse volumique de l'eau pure en fonction de la température, pour quelques températures données ont donné comme résultats :

Températures ($^{\circ}C$)	0	5	10	15	20
Masse volumique (kg/m^3)	999.87	999.99	999.73	999.13	998.23

Stocker ces mesures dans deux tableaux : **Temperature** et **MasseVol**.

- 4) Calculer les estimations du polynôme de Lagrange pour x variant entre 0° et 20° avec un pas égal à 0.1 de deux méthodes différentes :
 - a. En utilisant la fonction implémentée.
 - b. En utilisant la fonction prédéfinie **lagrange(vectx, vecty)** du module *scipy.interpolate*
- 5) Tracer sur le même graphique avec grille:
 - a. La courbe des mesures en rouge avec label= 'mesures'.
 - b. La courbe des estimations de lagrange par la méthode implémentée en bleu avec label='lagrange_impl'.
 - c. La courbe des estimations de lagrange par la fonction prédéfinie en vert avec label 'lagrange_import'.