Institut **P**réparatoire aux **E**tudes d'**I**ngénieurs de **N**abeul
Informatique : TP Python

TP 3. Simulation Numérique
Résolution et intégration numérique des fonctions

Exercice 1 : Comparaison de différentes méthodes de résolution

Soient $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur $[a;b]$. On suppose que f' est continue, ne s'annule pas et que $f(a) \times f(b) < 0$. Il existe alors un unique réel $r \in]a;b[$ tel que $f(r) = 0$.

1. Donner une équation de la corde de la courbe de f entre les pints d'abscisses a et b. Calculer l'abscisse c du point d'intersection de cette corde avec l'axe des abscisses.
2. `Méthode de la fausse position`. Le principe de cette méthode, proche de celle de dichotomie, consiste aussi à diviser à chaque étape l'intervalle de travail en deux parties. Mais au lieu de couper un segment $[u;v]$ en son milieu, on construit la corde entre les points de coordonnées $(u, f(u))$ et $(v, f(v))$ et on calcule l'abscisse c de l'intersection de cette corde avec l'axe des abscisses. comme pour la dichotomie, on choisit ensuite de continuer dans l'intervalle $[u;c]$ ou dans l'intervalle $[c;v]$ en fonction du signe de $f(u) \times f(c)$.
   a. Illustrer la méthode et définir des relations de récurrence correspondant à ce schéma en s'inspirant du cours sur la dichotomie.
   b. Définir une fonction Python `fausse_pos` d'arguments f, a, b et e permettant de trouver une valeur approchée du zéro de f sur $[a;b]$ avec un critère d'arrêt e. Cette fonction devra également renvoyer le nombre d'itérations effectuées.
3. `Méthode de la sécante`. Dans certains cas, le calcul de f' est difficil ou très long, voire impossible. Dans la méthode de la sécante, on procède comme dans la méthode de Newton, mais on approche la valeur de la dérivée en un point par la pente d'une corde, autrement dit on approche la tangente en ce point par une corde : partant de u et v, on construit la corde entre les points de coordonnées $(u, f(u))$ et $(v, f(v))$ et on calcule l'abscisse w de l'intersection de cette corde avec l'axe des abscisses, puis on recommence entre v et w et ainsi de suite.
   a. Illustrer la méthode et définir des relations de récurrence correspondant à ce schéma en s'inspirant du cours sur la méthode de Newton. On prendra $x_0 = a$ et $x_1 = b$.
   b. Définir une fonction Python `secante` d'arguments f, a, b et e permettant de trouver une valeur approchée du zéro de f sur $[a;b]$ avec un critère d'arrêt e. Cette fonction devra également renvoyer le nombre d'itérations effectuées.
4. On veut maintenant comparer entre elles les différentes méthodes.
   a. Ecrire des fonctions `decho` et `Newton`, d'arguments à préciser, permettant la résolution approchée sur $[a;b]$ de l'équation $f(x) = 0$, utilisant respeectivement les méthodes de dichotomie et de Newton. Comme les précédentes, ces fonctions devront également le nombre d'itérations effectuées.
   b. Se rensigner sur la fonction `fsolve` du sous-module `optimize` de `scipy`.
   c. Ecrire une fonction `compare(f, fp, a, b, x0, e)`, de paramètres une fonction, sa dérivée, les bornes de l'intervalle, une point de départ `X0` et une critère d'arrêt `e`, permettant de renvoyer les valeurs approchées de la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a;b]$ obtenues par `fsolve`, `dicho`, `fausse_pos`, `secante` et `newton`, ainsi que les nombre d'itérations nécessaires pour ces 4 dernières méthodes. L'appliquer avec $f : x \longrightarrow x^2 - 2$ sur $[1;2]$ pour différentes valeurs de `e`.

Exercice 2 : Calcul approché d'une intégrale

La méthode des rectangles (à gauche) approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N rectangles de largeur $\frac{b-a}{N}$, via la formule

$$Rg_N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+k\frac{b-a}{N}\right)$$

La méthode des rectangles (à droite) approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N rectangles de largeur $\frac{b-a}{N}$, via la formule

$$Rd_N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(a+k\frac{b-a}{N}\right) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{N}\right)$$

La méthode des trapèzes approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N rectangles de largeur $\frac{b-a}{N}$, via la formule

$$T_N(f) = \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a+k\frac{b-a}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(Rg_N(f)+Rd_N(f)\right)$$

Enfin, la méthode de Simpson approche cette intégrale (vue comme une aire) par la somme des aires sous la courbe de N polynômes du second degré, via la formule

$$S_N(f) = \frac{b-a}{6N}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(a+k\frac{b-a}{N}\right)+4\sum_{k=1}^{N-1} f\left(a+(k+\frac{1}{2})\frac{b-a}{N}\right)+f(b)\right]$$

On se réfèrera au cours de mathématiques pour plus de détails. On considère aussi la fonction suivante :

$$f:\begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} cos(8\pi x) & si \quad x \le 1/4; \\ 1/2+cos(160\pi x) & si \quad 1/4 < x \le 1/2; \\ -1/2 & si \quad 1/2 < x \le 3/4; \\ 8(x-1)(16x-13)+cos(32\pi x) & si \quad x > 3/4 \end{cases} \end{cases}$$

Q1 Écrire une fonction `f(x)` renvoyant $f(x)$, pour $x \in [0,1]$.

Q2 Écrire une fonction `plot_f(nom_de_fichier)` ne renvoyant rien et enregistrant dans `nom_de_fichier` le graphe de la fonction f.

Q3 Calculer à la main $\int_0^1 f(t)dt$.

Q4 Écrire une fonction $R_g(g,a,b,N)$ renvoyant $Rg_N(g)$ pour une fonction g définie sur $[a,b]$.

Q5 Écrire une fonction $R_d(g,a,b,N)$ renvoyant $Rd_N(g)$ pour une fonction g définie sur $[a,b]$.

Q6 Écrire une fonction $T(g,a,b,N)$ renvoyant $T_N(g)$ pour une fonction g définie sur $[a,b]$.

Q7 Écrire une fonction $S(g,a,b,N)$ renvoyant $S_N(g)$ pour une fonction g définie sur $[a,b]$.