Devoir maison n°5

Corrigé

⋆ ⋆ ⋆

Programmation linéaire et relaxation continue

Question 1

- Une condition $X \geqslant 0$ peut s'écrire $-X \leqslant 0$, donc quitte à rajouter des lignes contenant des -1 dans la matrice A et des 0 dans la matrice B, le problème est bien équivalent.
- Si A est non carrée, on peut se ramener à une matrice carrée, quitte à rajouter des lignes de 0 dans A ou B.
- Si on cherche à minimiser $C^T X$, cela revient à maximiser $-C^T X$, donc on se ramène au problème précédent en remplaçant C par $-C$.

1 Programmation entière

Question 2 Soit (A, B) une instance de `EZU`. En rajoutant la contrainte supplémentaire $0 \leqslant X \leqslant 1$, on peut, d'après la question précédente, se ramener à une instance (A', B') telle que $(A, B) \in$ `EZU` si et seulement si $(A', B') \in$ `PE`. Cette construction peut bien se faire en temps polynomial, d'où la réduction.

Question 3 On a $\mu(C) = 1$ si et seulement s'il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\mu(\ell_i) = 1$. Comme $\mu(\ell_i) \in \{0, 1\}$, on en déduit le résultat.

Question 4 On pose $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]}$ et $B = (b_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ telles que :

- si v_j apparait dans C_i, alors $a_{ij} = -1$;
- si $\overline{v_j}$ apparait dans C_i, alors $a_{ij} = 1$;
- sinon, $a_{ij} = 0$;
- $b_i = -1 + k$ où k est le nombre de négations qui apparaissent dans C_i.

Dès lors montrons que φ est satisfiable si et seulement s'il existe X tel que $AX \leqslant B$.

- supposons φ satisfiable et soit μ un modèle de φ. On pose $X = (\mu(v_1)\mu(v_2) \cdots \mu(v_n))^T$. On a alors $[AX]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Dès lors, si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, on a $[AX - B]_i = -\mu(\ell_1) - \mu(\ell_2) - \mu(\ell_3) - 1 \leqslant 0$;
- réciproquement, soit $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\{0, 1\})$ tel que $AX \leqslant B$. On pose, pour $j \in [\![1, m]\!]$, $\mu(v_j) = x_j$. Par le même calcul que précédemment, on montre que $\mu(C) = 1$ en utilisant la question précédente.

Question 5 Il est clair que `PE` $\in$ NP, un certificat étant un tel vecteur X, et une vérification consiste à calculer AX et à vérifier les inégalités, ce qui se fait bien en temps polynomial. On obtient donc `3-SAT` $\leqslant^{\mathsf{p}}_{\mathsf{m}}$ `EZU` $\leqslant^{\mathsf{p}}_{\mathsf{m}}$ `PE`, `3-SAT` est NP-difficile et `PE` $\in$ NP, donc ces problèmes sont bien NP-complets.

2 Couverture des arêtes par les sommets

Question 6 Soit $X = (x_1 \ldots x_n)^T$ un vecteur à coefficients dans $\{0, 1\}$. On pose $C = \{i \in [\![1, n]\!] \mid x_i = 1\}$. Alors X est solution du problème `EZU` si et seulement si C est solution de `Couverture par Sommets` : le cardinal de C est exactement la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i$ et X vérifie $x_i + x_j \geqslant 1$ pour $\{i, j\} \in A$ si et seulement si C est une couverture par sommets : $x_i + x_j \geqslant 1$ si et seulement si $x_i = 1$ ou $x_j = 1$ (ou les deux) si et seulement si $x_i \in C$ ou $x_j \in C$ (ou les deux).

Question 7 Une solution à ce problème `EZU` est aussi une solution au problème `PL`, d'où l'inégalité.

Question 8 On remarque que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i \leqslant 2x_i$ et on utilise la question précédente pour conclure.

Question 9 Il faut montrer que Y est bien une solution du problème `EZU` puis utiliser la question 6. En effet, pour $a = \{i, j\} \in A$, $x_i + x_j \geqslant 1$, donc l'une de ces deux valeurs est $\geqslant \frac{1}{2}$, donc y_i ou y_j est égal à 1. Dès lors, la 2-approximation est :

> **Entrée :** graphe $G = (S, A)$.
> **Début algorithme**
> $X \leftarrow$ solution au problème `PL`.
> $Y \leftarrow$ vecteur calculé comme décrit précédemment.
> $C \leftarrow \{i \in [\![1, n]\!] \mid y_i = 1\}$.
> **Renvoyer** C.

Comme on a admis que `PL` pouvait se résoudre en temps polynomial, cet algorithme est polynomial.

3 Couverture d'ensemble

Question 10 Il suffit de reformuler la relaxation continue donnée dans l'énoncé...

* **Instance** : un entier N et une collections d'ensembles $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{P}([\![1, N]\!])$.
* **Solution** : un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0, 1\})$ vérifiant $\sum\limits_{j \in J(x)} x_j \geqslant 1$ pour tout $x \in [\![1, N]\!]$.
* **Optimisation** : minimiser $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Ce problème est bien équivalent : $x_i = 1$ si et seulement si $i \in I$ et la contrainte $\sum\limits_{j \in J(x)} x_j \geqslant 1$ assure qu'il existe $i \in I$ tel que $x \in S_i$. On a également $|I| = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Question 11 D'après l'algorithme $\mathbb{E}(|I|) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(i \in I) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. On conclut comme en question 7 en remarquant qu'une solution à coefficients dans $\{0, 1\}$ est en particulier une solution au problème de relaxation continue.

Question 12 On commence par montrer l'inégalité demandée : on pose $f(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$. On a $f'(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. On obtient le tableau de variation :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ce qui donne bien l'inégalité voulue. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(x \notin \bigcup_{i\in I} S_i\right) &= \prod_{j\in J(x)} \mathbb{P}(i \notin I) \\
&= \prod_{j\in J(x)} (1 - x_i) \\
&\leqslant \prod_{j\in J(x)} \mathrm{e}^{-x_i} \\
&= \mathrm{e}^{\sum_{j\in J(x)} -x_i} \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-1}
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité demandée en passant à l'événement contraire.

Question 13 On a :

$$\mathbb{P}\left(x \notin \bigcup_{i\in I} S_i\right) \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{\lceil 2\ln N\rceil} \leqslant \frac{1}{e^{2\ln N}} = \frac{1}{N^2}$$

Question 14 Par la question précédente, la probabilité qu'il existe un élément non couvert est égale à $N\frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$.

Question 15

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|I| \leqslant (4\ln N + 2)|I|^*) &= 1 - \mathbb{P}(|I| > (4\ln N + 2)|I|^*) \\
&\geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}(|I|)}{(4\ln N + 2)|I|^*} \\
&\geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La première inégalité est due à l'inégalité de Markov. La deuxième inégalité vient du fait que $\mathbb{E}(|I|) \leqslant \lceil 2\ln N\rceil\, \mathbb{E}(|I'|) \leqslant \lceil 2\ln N\rceil\, |I|^*$ d'après la question 11, I' désignant un ensemble renvoyé par `Couv_Alea`.

⋆⋆⋆