

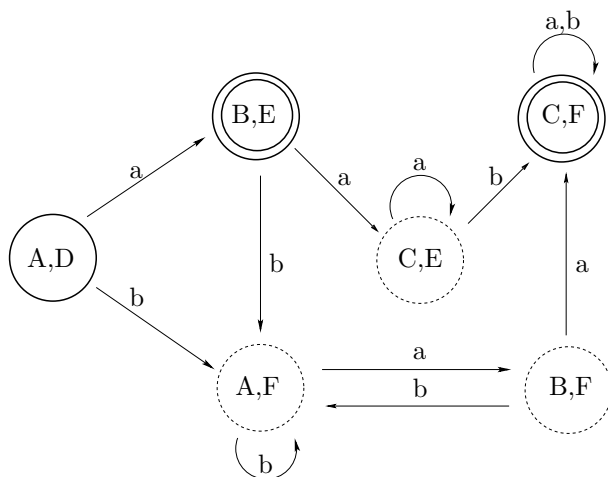
Partie I. Logique et calcul des propositions.

- 1) Ce nombre minimum est évidemment de 2 (atteint lorsqu'on peut attribuer une valeur de vérité à chacune des deux déclarations de l'opérateur). \square
- 2) $A_V \equiv A_1 A_2 \dots A_n$ $A_M \equiv \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}$ $A_{CV} \equiv A_1 \overline{A_2} \dots (-1)^{n+1} A_n$ $A_{CM} \equiv \overline{A_1} A_2 \dots (-1)^n A_n$
avec la convention $(-1)^k A_i = A_i$ si i est pair et $\overline{A_i}$ sinon. \square
- 3) $A_1 \equiv R\overline{B}$; $A_2 \equiv R + V$; $A_3 \equiv (RV) \implies B \equiv \overline{R}\overline{V} + B \equiv \overline{R} + \overline{V} + B$ \square
Notons aussi que $\overline{A_1} \equiv \overline{R} + B$; $\overline{A_2} \equiv \overline{R}\overline{V}$; $\overline{A_3} \equiv RV\overline{B}$
- 4) $A_V \equiv (R\overline{B})(R + V)(\overline{R} + \overline{V} + B) \equiv (R\overline{B})(R\overline{V} + RB + V\overline{R} + VB) \equiv R\overline{B}\overline{V}$
 $A_M \equiv (\overline{R} + B)(\overline{R}\overline{V})(RV\overline{B}) \equiv (\overline{R} + B)faux \equiv faux$
 $A_{CV} \equiv (R\overline{B})(\overline{R}\overline{V})(\overline{R} + \overline{V} + B) \equiv faux(\overline{R} + \overline{V} + B) \equiv faux$
 $A_{CM} \equiv (\overline{R} + B)(R + V)(RV\overline{B}) \equiv (\overline{R} + B)(RV\overline{B}) \equiv faux$ \square
- 5) Il en découle que l'opérateur A est de type véridique et qu'il n'aime que le rouge. \square
- 6) $G_1 \equiv (C \implies L) \equiv \overline{C} + L$; $H_1 \equiv C + T$; $I_1 \equiv L$; $I_2 \equiv \overline{T}$ \square
- 7) Les informations sur la nature des opérateurs sont représentées par la formule $I \equiv \overline{G_1}H_1(I_1\overline{I_2} + \overline{I_1}I_2)$ \square
- 8) On a $\overline{G_1}H_1 \equiv C\overline{L}(C + T) \equiv C\overline{L}$ et $I_1\overline{I_2} + \overline{I_1}I_2 \equiv LT + \overline{L}\overline{T}$
De sorte que $I \equiv C\overline{L}(LT + \overline{L}\overline{T}) \equiv C\overline{L}\overline{T}$
Ainsi seul le cercle est visible et I commence par mentir \square

Partie II. Automates et langages.

- 1) Le langage régulier (théorème de Kleene) reconnu par \mathcal{E}_1 peut être décrit par l'expression régulière $L_1 = (ab + b)^* a^2 (a + b)^*$.
Celui reconnu par \mathcal{E}_2 peut évidemment être décrit par $L_2 = aa^*$. \square

2)



- 3) Le langage reconnu par $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ est décrit par l'expression régulière $a + ((ab + b)(ab + b)^* a^2 + a^2 a^* b)(a + b)^*$ \square
- 4) Évident par définition même de la composition de deux automates finis complets déterministes. \square
- 5) Démonstration immédiate par récurrence sur $n = |m|$. \square
- 6) Résulte immédiatement de la question précédente et de la définition des états finaux de $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. \square
- 7) Il en résulte que $L_1 \oplus L_2$ est l'ensemble des mots appartenant à l'un des langages mais pas à l'autre. \square

On peut le vérifier sur les expressions régulières :

1/ Si $m = a$ alors $m \in L_2 = aa^*$ mais $m \notin L_1$ car tout mot de L_1 contient le sous-mot a^2 ;

2/ Si $m \in ((ab + b)(ab + b)^* a^2 + a^2 a^* b)(a + b)^*$ alors $m \in (ab + b)^* a^2 (a + b)^* = L_1$ clairement mais $m \notin L_2$ car m contient la lettre b .

Partie III. Algorithmique et programmation en CaML.

1/ Séquence croissante d'entiers

```
1) | let rec ajoutSequence v s = match s with
    | [] -> [v]
    | a::suite -> if (v <= a) then v::s else a::(ajoutSequence v suite)
    ;;
    ajoutSequence : 'a -> 'a list -> 'a list = <fun>
```

2) La complexité est au mieux à temps constant lorsque l'élément v à ajouter est inférieur au premier de la séquence s et au pire linéaire lorsque v est plus grand que tous les éléments de s car alors l'équation de complexité est $T(n) = T(n-1) + \alpha$. \square

3) On commence par écrire une fonction `partage` de sorte que `partage p s` renvoie (s_1, v, s_2) avec $s = s_1 @ (v :: s_2)$ où v est l'élément de s venant en position p .

Les arguments sont supposés de sorte que s est non vide et $1 \leq p \leq n$ avec n la longueur de s .

```
| let rec partage p s = match p with
  | 1 -> ([], hd s, tl s)
  | _ -> let (a::suite) = s in
          let (s1,v,s2) = partage (p-1) suite in
          (a::s1,v,s2)
  ;;
  partage : int -> 'a list -> 'a list * 'a * 'a list = <fun>
```

D'où la fonction demandée s'appliquant à une séquence non vide de longueur impaire :

```
| let scissionSequence s =
  let n = length s in partage ((n+1)/2) s
  ;;
  scissionSequence : 'a list -> 'a list * 'a * 'a list = <fun>
```

2/ Arbres binaires de recherche d'entiers

4) `eliminer 2 exemple` empile dans (1) `eliminer 2 Noeud(Noeud(Vide,1,Vide),2,Vide)`
qui empile dans (2) `eliminer 2 Noeud(Vide,1,Vide)`
qui empile dans (3) `eliminer 2 Vide` qui renvoie `Vide` (cas de base de `eliminer`)
Alors (2) renvoie `Noeud(Vide,1,Vide)`
puis (1) appelle aux `Noeud(Vide,1,Vide)` qui renvoie $(1, \text{Vide})$ (cas de base de `aux`)
et (1) renvoie finalement `Noeud(Vide,1,Noeud(Vide,3,Vide))` \square

5) 6) • Commençons par étudier la fonction `aux` et prouver que :

- (1) elle se termine dans tous les cas;
- (2) sa complexité est égale à la longueur de la branche la plus à droite de son paramètre a ;
- (3) si $a = \text{Noeug}(g, v, d)$ est non vide alors $(w, b) = \text{aux } a$ est tel que :
 $ABR(b), C(a) = C(b) \cup \{w\}$ et $x \leq w$ pour $x \in C(b)$.

Notons que la propriété (3) revient à dire que w est un élément maximal de a .

Remarquons surtout que cela revient à dire que `Noeud(b,w,Vide)` est une réorganisation de a en un ABR dont la racine est un élément maximal de a (celui le plus bas de la branche la plus à droite de a).

On raisonne par récurrence sur la taille $n \geq 1$ de a .

Si $n = 1$ alors $a = \text{Noeud}(Vide, v, Vide)$ et $(w, b) = (v, Vide)$ et les propriétés sont bien satisfaites.

Supposons les propriétés satisfaites jusqu'à l'ordre $n - 1$ avec $n \geq 2$ et soit $a = \text{Noeud}(g, v, d)$ de taille n .

- Si $d = \text{Vide}$ alors $(w, b) = (v, g)$ et les propriétés sont bien satisfaites.
- Sinon $(w, b) = (vr, \text{Noeud}(g, v, ar))$ avec $(vr, ar) = \text{aux } d$

1/ Par hypothèse de récurrence le calcul de `aux d` se termine avec un nombre d'appels récursifs égal à la longueur de la branche la plus à droite de d donc celui de `aux a` se termine bien et avec un nombre d'appels récursifs égal à la longueur de la branche la plus à droite de a .

2/ Par hypothèse de récurrence `Noeud(ar,vr,Vide)` est une réorganisation de d en un ABR avec vr élément maximal de d . Donc `Noeud(b,w,Vide) = Noeud(Noeud(g,v,ar), vr, Vide)` est bien une réorganisation de a . C'est bien un ABR car `Noeud(g,v,ar)` est un ABR car g et ar le sont et car les étiquettes de ar sont parmi celles de d donc sont strictement supérieures à w . En outre vr est élément maximal de d donc de a .

Ce qui établit les 3 propriétés de manière générale. \square

- Étudions désormais la fonction `eliminer` en prouvant que :
 - (1) elle se termine toujours;
 - (2) si `eliminer v a=r` alors `r` est un ABR tel que $C(r) = C(a) \setminus \{v\}$.

On raisonne par récurrence sur la taille n de `a`.

Si $n = 0$ i.e. si `a` est vide alors `r` est vide également et la propriété est bien vérifiée.

Supposons (1) et (2) vérifiées jusqu'à l'ordre $n - 1$ avec $n \geq 1$ et soient `a` de taille n et un entier v .

Notons `a=Noeud(g, vp, d)` de sorte que $ABR(g) \wedge ABR(d)$, $x \leq vp$ si $x \in C(g)$ et $x > vp$ si $x \in C(d)$ (*)

Premier cas : $v < vp$

Notons `rg=eliminer v g` de sorte que `r=Noeud(rg, vp, d)`

Par hypothèse de récurrence le calcul de `eliminer v g` se termine donc celui de `eliminer v a` aussi et on a $ABR(rg)$ et $C(rg) = C(g) \setminus \{v\}$

Il découle alors immédiatement de (*) que $ABR(r)$ et que les étiquettes de `r` sont celles de `a` privé de v \square

Deuxième cas : $v > vp$

Même démonstration, les rôles des fils `g` et `d` étant permutés. \square

Troisième cas : $v = vp$

Par hypothèse de récurrence la calcul de `rg=eliminer v g` se termine.

- Si `rg` est vide alors `r=d` et la propriété est clairement satisfaite.
- Sinon `r=Noeud(gp, vm, d)` avec `(vm, gp)=aux rg`

D'après l'étude de la fonction `aux`, le calcul de `aux rg` se termine. Donc le calcul de `eliminer v a` se termine bien. En outre `rg` vérifie (2) (par hypothèse de récurrence) et, d'après l'étude de la fonction `aux`, `Noeud(gp, vm, Vide)` est une réorganisation de `rg` en un ABR. Les éléments de `d` sont strictement supérieurs à v donc a fortiori à `vm` car `vm` est un élément de `g`. Il en résulte que `r=Noeud(gp, vm, d)` est bien un ABR et comme ses étiquettes sont celles de `a` privé de v la propriété (2) est établie. \square

7) 8)

À chaque noeud visité la fonction `eliminer` est appelée sur le fils droit ou gauche. Le nombre d'appels récursifs est donc au plus égal à la profondeur de l'arbre.

Si la valeur v ne figure pas dans `a`, aucun appel à la fonction `aux`.

Si la valeur v figure une seule fois, la fonction `eliminer` appelle `aux` une seule fois ce qui déclenche (vu l'étude précédente) un nombre d'appel récursif de la fonction `aux` dominé par la profondeur de `a`

Si v figure m fois avec $m \geq 2$, la branche de gauche du noeud où il figure la première fois est filiforme avec dans l'ordre $m - 1$ fois la valeur v puis éventuellement des valeurs strictement plus petites et décroissantes. Les appels à `aux` pour les noeuds d'étiquette v tombent donc alors directement sur le cas de base et n'induisent aucun appel récursif de la fonction `aux`.

Conclusion :

Dans tous les cas la complexité comptée en nombre d'appels récursifs des fonctions `eliminer` et `aux` est dominée par la profondeur de l'arbre.

1/ Si `a=Noeud(Vide, vp, g)` et si $v < vp$ la complexité est minimale avec un seul appel récursif à la fonction `eliminer`

2/ Si `a=Noeud(g, v, d)` et que la branche la plus à gauche de `a` a pour longueur la profondeur de `a`, la complexité est un $\Theta(p)$ où p est la profondeur de l'arbre.

De manière plus précise la complexité maximale est de $p - 1$ appels à `eliminer` et autant à `aux` si `g` ne contient pas la valeur v et si la branche la plus à droite de `g` a, comme sa branche la plus à gauche, pour longueur $p-1$. \square

3/ Structure de données B-Arbres d'entiers

Remarque : Plutôt que de considérer l'ordre comme étant défini dans une variable globale, nous passerons cet ordre, noté `n`, en paramètre dans toutes les fonctions demandées.

Pour la commodité de lecture des fonctions on emploiera les lettres suivantes (éventuellement indicées) :

- `a` pour un arbre (ou un noeud);
- `s` pour la séquence d'entiers d'une feuille;
- `f` pour la liste des paires d'un noeud (i.e. `freres`);
- `e` pour une étiquette;
- `p` pour une paire.

9)

```
let estComplet n a = match a with
  | Feuille s   -> ((list_length s) + 1) = 2 * n
  | Noeud (a1,f) -> ((list_length f) + 1) = 2 * n
;;
estComplet : int -> bArbre -> bool = <fun>
```

10) Cette fonction s'écrit facilement en récursivité croisée avec la fonction `taille_freres`.

```

let rec taille a = match a with
  | Feuille s    -> list_length s
  | Noeud (a1,f) -> taille a1 + taille_freres f
and taille_freres f = match f with
  | []          -> 0
  | (_,a)::suite -> 1 + taille a + taille_freres suite
;;
taille : bArbre -> int = <fun>
taille_freres : freres -> int = <fun>

```

11) De même récursivité croisée avec `recherche_freres`.

```

let rec recherche v a = match a with
  | Feuille [] -> false
  | Feuille (e::suite) -> if (v < e) then false
                          else if (v = e) then true
                          else recherche v (Feuille suite)
  | Noeud (a,f) -> if recherche v a then true else recherche_freres v f
and recherche_freres v f = match f with
  | [] -> false
  | (e,a)::suite -> if (v < e) then false
                    else if (v = e) then true
                    else if recherche v a then true
                    else recherche_freres v suite
;;
recherche : int -> bArbre -> bool = <fun>
recherche_freres : int -> freres -> bool = <fun>

```

12)

```

let rec scissionBArbre a = match a with
  | Feuille s -> let (s1,e,s2) = scissionSequence s in
                 (Feuille s1,e,Feuille s2)
  | Noeud (a,f) -> let (f1,p,f2) = scissionSequence f in
                   let a1 = Noeud (a,f1) and (e,a2) = p in
                   let a3 = Noeud (a2,f2) in
                   (a1,e,a3)
;;
scissionBArbre : bArbre -> bArbre * int * bArbre = <fun>

```

13) Le parcours commence à la racine qui est noeud complet et qui est donc scindé en l'arbre $\text{Noeud}(a1,[(12;b1)])$ avec $a1=\text{Noeud}(a2,[(9;b2)])$.

Comme $3 < 12$ le parcours se dirige sur la branche de gauche c'est à dire l'arbre $a1$ dont la racine est incomplète (une seule étiquette 9) donc pas de scission.

Puis $3 < 9$ et le parcours se dirige sur l'arbre $a2=\text{Noeud}(\text{Feuille}([2;4;6]),[(7;b3)])$.

Comme $3 < 7$ le parcours atteint la feuille $\text{Feuille}([2;4;6])$ qui est complète et est donc scindée en $\text{Noeud}(\text{Feuille}([2]),[(4,\text{Feuille}([6])])$.

Puis enfin $3 < 4$ et 3 est inséré dans la feuille de gauche qui devient $\text{Feuille}([2;3])$.

14) 15)

Montrons par itération que l'algorithme se termine et préserve la structure de B-Arbre.

Notons $r_0 = a$ l'arbre initial et $p_0 = p$ sa profondeur et notons p_k la profondeur du noeud a_k sur lequel se dirige le parcours à un certain stade de l'algorithme et r_k l'état de l'arbre total à ce stade.

Supposons que r_k soit un B-Arbre.

- Si $p_k = 0$ alors a_k est la feuille cible.

1/ Si a_k est incomplète on insère v dans cette feuille qui devient a_{k+1} . L'algorithme est terminé et r_{k+1} obtenu à partir de r_k en remplaçant a_k par a_{k+1} est bien un B-Arbre. \square

2/ Si a_k est complète, a_k est scindée en $\text{Noeud}(f1,[(w,f2)])$ où $f1$ et $f2$ sont deux feuilles incomplètes. L'arbre total devient r_{k+1} dont la structure de ABR est clairement préservée.

Puis le parcours se dirige sur $f1$ ou $f2$ suivant que v est inférieur ou supérieur à w et on retrouve dans le cas 1/ précédent d'une feuille incomplète. \square

- Si $p_k \geq 1$ c'est à dire si a_k est un noeud interne :

1/ Si a_k est incomplet : on parcourt de gauche à droite la liste des étiquettes de a_k pour déterminer le fils noté a_{k+1} de a_k vers lequel se diriger (algorithme "bon-fils" décrit plus bas). Ainsi r_k n'est pas modifié donc la structure de ABR est bien conservée et p_k a diminué d'une unité.

2/ Si a_k est complet on le scinde en a'_k de profondeur $p_k + 1$. L'arbre total devient r_{k+1} qui conserve bien la structure de ABR puis le parcours se dirige sur le fils a_{k+1} droit ou gauche de la racine de a'_{k+1} de profondeur $(p_k + 1) - 1 = p_k$.

On se retrouve alors dans la situation de 1/ et à l'étape suivante p_k diminue donc de une unité.

En conclusion tant que l'on ne tombe pas sur la feuille cible p_k diminue à chaque étape de une unité donc finit par atteindre 0 et l'algorithme se termine bien en renvoyant un B-arbre contenant la nouvelle valeur. \square

Décrivons l'algorithme "bon-fils" sur un noeud incomplet $a = \text{Noeud}(a1, f)$

Notons que comme a n'est pas une feuille, la liste f est non vide. Notons $f = (e1, a2) :: \text{suite}$

Si $v \leq e1$ le bon fils est $a1$

Sinon Si suite est vide le bon fils est $a2$

Sinon on applique "bon-fils" à $\text{Noeud}(a2, \text{suite})$ \square

16) Le rôle de "bon-fils" est tenu par la fonction `ajouter_freres v n f` dont les paramètres sont pour f une séquence non vide de paires (dont les arbres sont des ABR d'ordre n) et v un entier strictement plus grand que l'étiquette de la première paire de la séquence f et qui renvoie la séquence obtenue à partir de f en ajoutant l'entier v dans le bon arbre de la séquence et en préservant la structure de ABR.

Cette fonction est définie en récursivité croisée avec la fonction `ajouter v n a`.

```

let rec ajouter v n a = match a with
| Feuille s when not (estComplet n a) -> Feuille (ajoutSequence v s)
| Feuille s -> let (f1,w,f2) = scissionBArbre n a in
    ajouter v n (Noeud (f1, [(w,f2)]))
| Noeud _ when (estComplet n a) -> let (a1,w,a2) = scissionBArbre n a in
    ajouter v n (Noeud (a1, [(w,a2)]))
| Noeud (a1,f) -> let (e1,a2) = hd f in
    if (v <= e1) then Noeud(ajouter v n a1, f)
    else Noeud(a1,ajouter_freres v n f)
and ajouter_freres v n f = match f with
| [(e,a)] -> [(e,ajouter v n a)]
| (e1,a1)::(e2,a2)::suite ->
    if (v <= e2) then (e1,ajouter v n a1)::(e2,a2)::suite
    else (e1,a1)::(ajouter_freres v n ((e2,a2)::suite))
;;
ajouter : int -> int -> bArbre -> bArbre = <fun>
ajouter_freres : int -> int -> freres -> freres = <fun>

```

————— FIN —————