DS5 : Corrigé

1. On ajoute un seuil k aux entrées du problème et la question fermée à laquelle il faut répondre est : existe-t-il un cycle hamiltonien dans G de poids inférieur ou égal au seuil k ?

2. Vérifier qu'une suite C de moins de $|S|$ sommets est un cycle hamiltonien dans le graphe $G = (S, A)$ peut se faire en temps polynomial en $|G|$ en vérifiant qu'il n'y a pas de doublons dans C, que $|C| = |S|$ et qu'il y a une arête de G entre deux sommets consécutifs de C (y compris entre le dernier et le premier). Le calcul du poids de C et sa comparaison au seuil se fait aussi en temps polynomial donc `PVC` est dans NP.

3. Soit $G = (S, A)$ une instance de `CYCLE HAM`. Alors le graphe complet $G' = (S, S^2)$ pondéré par la fonction f qui donne comme poids 1 à toutes les arêtes de S^2 qui sont dans A et 2 à celles qui ne sont pas dans A est un graphe qu'on peut construire polynomialement en $|G|$ donc $(G', |S|)$ est une instance de `PVC` constructible en temps polynomial en $|G|$.

   Or, si G admet un cycle hamiltonien, alors ce cycle est un cycle hamiltonien dans G' de poids égal (donc inférieur ou égal) à $|S|$ et réciproquement, si G' admet un cycle hamiltonien de poids inférieur ou égal à $|S|$ alors ce cycle est aussi un cycle hamiltonien dans G car il ne passe par aucune des arêtes de poids 2 qu'on a ajoutées à G pour obtenir le graphe complet G'. Donc G est une instance positive pour `CH` si et seulement si $(G', |S|)$ est une instance positive de `PVC`.

   Ceci montre que `CH` $\leq$ `PVC` et comme `CH` est NP-difficile d'après l'énoncé, `PVC` aussi. Comme la question 2 assure qu'il est dans NP, il est finalement NP-complet.

4. Le nombre de permutations des sommets est $n!$. Comme un cycle hamiltonien commence à partir de n'importe quel sommet et peut être parcouru dans les deux sens (le graphe étant non orienté), à chaque cycle correspondent $2n$ permutations. Le nombre de cycles hamiltoniens différents est donc $(n-1)!/2$.

5. Il s'agit de récupérer le coefficient qui se trouve en position (s, t) dans la matrice d'adjacence ; ce dernier se trouve en case $s \times n + t$ dans le tableau représentant le graphe :

```c
int f(int* G, int n, int s, int t)
{
    return G[s*n+t];
}
```

6. On somme les poids (calculés grâce à la fonction précédente) de toutes les arêtes intervenant dans le cycle. Attention à ne pas oublier l'arête fermant le cycle (entre le dernier sommet et le premier).

```c
int poids_cycle(int* G, int* c, int n)
{
    int poids = f(G,n,c[0],c[n-1]);
    for (int i = 0; i < n-1; i++)
    {
        poids = poids + f(G,n,c[i],c[i+1]);
    }
    return poids;
}
```

7. On propose l'algorithme suivant :

   - Calculer j : on initialise j à $n-2$ et on le décrémente tant qu'il est positif et que $p_j > p_{j+1}$.

- Si $j = -1$, les éléments formant la permutation actuelle sont triés dans l'ordre décroissant : on est donc face à la dernière permutation selon l'ordre lexicographique et on renvoie alors faux.
- Sinon :
  - Calculer k : on initialise k à $n-1$ et on le décrémente tant que $p_j > p_k$.
  - Échanger les valeurs de p_j et p_k.
  - Renverser les valeurs comprises entre les indices $j+1$ et $n-1$.
  - Renvoyer vrai.

8. On commence par créer deux tableaux : l'un pour stocker la premutation courante (initialisé avec la première permutation selon l'ordre lexicographique), l'autre pour stocker la permutation correspondant au meilleur cycle hamiltonien trouvé pour le moment. Tant qu'on n'a pas atteint la dernière permutation, on calcule le poids du cycle correspondant à la permutation courante et on met à jour `poids_min` et `cmin` le cas échéant. On libère le tableau non renvoyé avant la fin.

```c
int* PVC_naif(int* G, int n)
{
    int* c = (int*)malloc(sizeof(int)*n);
    int* cmin = (int*)malloc(sizeof(int)*n);
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        c[i] = i;
        cmin[i] = i;
    }
    int poids_min = poids_cycle(G,c,n);
    while (permutation_suivante(c,n))
    {
        int poids = poids_cycle(G,c,n);
        if (poids < poids_min)
        {
            poids_min = poids;
            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                cmin[i] = c[i];
            }
        }
    }
    free(c);
    return cmin;
}
```

9. Notons n le nombre de sommets du graphe en entrée. La boucle tant que de `PVC_naif` est exécutée autant de fois qu'il y a de permutation de $[\![0, n-1]\!]$, soit $n!$ fois. A chaque itération, on fait un appel à `permutation_suivante` en $O(1)$, un appel à `poids_cycle` en $O(n)$ et une éventuelle recopie de tableau en $O(n)$. La complexité totale est donc en $O(n \times n!)$.

10. Les chemins de 0 à s passant une et une seule fois par chaque sommet de S' se partitionnent en

$$\bigsqcup_{s' \in S' \text{ voisin de } s} \{\text{chemins allant de } 0 \text{ à } s' \text{ passant une et une seule fois par chaque sommet de } S' \setminus \{s'\}\}$$

puisque sur un tel chemin, s a forcément un prédecesseur dans S'. On a donc :

$$P_{\min}(s, S') = \min_{s' \in S'} \left(P_{\min}(s', S' \setminus \{s'\}) + f(s, s') \right)$$

et tout sommet s' pour lequel ce minimum est atteint est un $\text{pred}(s, S')$ convenable.

11. Si c est un objet mutable, qu'on créé une association entre la clé c et une valeur v puis qu'on modifie (potentiellement par mégarde) c, la valeur v ne peut plus être retrouvée avec la variable c comme clé.

12. Un tableau de booléens de taille n peut être assimilé à la décomposition en base deux d'un entier entre 0 et $2^n - 1$. On exploite cette correspondance pour encoder de manière unique chaque sous ensemble S'. Pour encoder de manière unique un couple (s, S'), on utilise tout simplement $(s,\ \text{encodage de } S')$.

```
let encodage (s:int) (ensemble:bool array) :int*int =
  let code_ensemble = ref 0 in
  for i = 0 to Array.length ensemble -1 do
    code_ensemble := 2* !code_ensemble;
    if ensemble.(i) then code_ensemble := !code_ensemble +1;
  done;
  (s, !code_ensemble)
```

13. Le principe est le suivant : on calcule la clé k correspondant au couple (s, S') en entrée à l'aide de `encodage`. Si cette clé n'est pas présente dans `tabh`, on calcule la valeur qui lui est associée et on la stocke dans `tabh`. Une fois cette opération faite, il existe une association ayant pour clé k dans `tabh` (soit parce que c'était déjà le cas, soit parce qu'on vient de la calculer) : on renvoie la valeur qui est associée à k.

```
let rec chemin_min (sommet:int) (ensemble:bool array) :int*int =
  let (s,code) = encodage sommet ensemble in
  if not (Hashtbl.mem tabh (s,code)) then
    begin
      if code = 0 then Hashtbl.add tabh (s,code) (g.(0).(sommet),0)
      else
        begin
          let poids_min = ref max_int in
          let smin = ref 1 in
          for s' = 1 to Array.length ensemble -1 do
            if ensemble.(s') then
              begin
                ensemble.(s') <- false;
                let poids = fst (chemin_min s' ensemble) + g.(s').(s) in
                ensemble.(s') <- true;
                if poids < !poids_min then
                  (poids_min := poids; smin := s')
              end
          done;
          Hashtbl.add tabh (s,code) (!poids_min, !smin);
        end
    end;
  Hashtbl.find tabh (s,code)
```

Le calcul d'une valeur à associer à une clé donnée se fait comme suit :

- Le cas de base se produit quand $S' = \emptyset$ (ce qu'on teste en vérifiant que le code associé à S' vaut 0) : dans ces conditions, $P_{\min}(s, S')$ est le poids d'un plus court chemin allant de 0 à s sans passer par aucun autre sommet : il s'agit donc de poids de l'arête $(0, s)$ et le prédecesseur de s est 0. Ceci est valable y compris lorsque s vaut 0.
- Le cas récursif se gère en s'aidant de la question 10. Pour chaque sommet s' dans S', on calcule $P_{\min}(s', S' \setminus \{s'\})$ (pour calculer $S' \setminus \{s'\}$, on retire temporairement s' à **`ensemble`** et on le rajoute une fois le calcul du $P_{\min}$ souhaité effectué) puis on met à jour le poids minimal trouvé et le sommet par lequel ce poids minimal est atteint le cas échéant.

14. On commence par créer un tableau de booléens **`ensemble`** encodant l'ensemble $S' = S \setminus \{0\}$ et un tableau **`cmin`** destiné à contenir le cycle souhaité. On reconstruit un chemin de 0 à 0 passant une et une seule fois par les sommets de S' en commençant par la fin : pour ce faire, on récupère successivement les prédecesseurs de 0 sur un chemin minimal grâce à **`chemin_min`**.

```
let pvc_dynamique () :int array =
  let n = Array.length g in
  let ensemble = Array.init n (fun i -> i <> 0) in
  let cmin = Array.make n 0 in
  let pred = ref (snd (chemin_min 0 ensemble)) in
  for i = n-1 downto 1 do
    cmin.(i) <- !pred;
    ensemble.(!pred) <- false;
    pred := snd (chemin_min !pred ensemble)
  done;
  cmin
```

15. Notons n le nombre de sommets du graphe considéré par `pvc_dynamique`.

    Pour tout $s \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $S' \subset S \setminus \{0\}$, on devra calculer $P_{\min}(s, S')$. Or, il y a $n2^{n-1}$ tels couples (s, S') et, pour chacun, le premier calcul de $(P_{\min}(s, S'), \text{pred}(s, S'))$ nécessite un parcours d'un tableau de taille n et au plus n appels à **`chemin_min`**, lesquels se font en $O(1)$ grâce à la mémoïsation. Le calcul de tous les $(P_{\min}(s, S'), \text{pred}(s, S'))$ nécessaires s'effectue donc en temps $O(n^2 2^n)$. Une fois ces valeurs calculées, la reconstruction d'un cycle hamiltonien de poids minimal se fait linéairement en n. Donc la complexité temporelle de `pvc_dynamique` est en $O(n^2 2^n)$.

    La complexité spatiale de cet algorithme correspond au nombre de valeurs stockées lors de la mémoïsation donc au nombre de couples $(s, S') \in [\![0, n-1]\!] \times S \setminus \{0\}$: elle est en $O(n2^n)$.

    Remarque : La complexité temporelle de l'algorithme de Held-Karp est bien meilleure que celle établie à la question 9 mais reste exponentielle ; et c'est normal. On observe au passage une illustration du compromis temps-mémoire.

16. En partant de 0, on obtient le cycle $(0, 1, 2, 4, 3)$, qui est de poids 23. En partant de 3, on obtient le cycle $(3, 2, 4, 0, 1)$, qui est de poids 22. Aucun de ces cycles n'est de poids minimal puisque le cycle $(0, 1, 4, 2, 3)$ est de poids strictement inférieur (égal à 18).

17. On commence par trouver un sommet non vu, et il en existe un par hypothèse ce qui garantit la terminaison de la boucle tant que ci-dessous. Puis, on parcourt les sommets restants en gardant en mémoire le sommet non vu qui minimise le poids de l'arête menant à s.

```c
int plus_proche(int* G, bool* vus, int n, int s)
{
    int tmin = 0;
    while (vus[tmin]) {tmin++;}
    for (int t = tmin; t < n; t++)
    {
        if (!vus[t] && f(G,n,s,t) < f(G,n,s,tmin)) {tmin = t;}
    }
    return tmin;
}
```

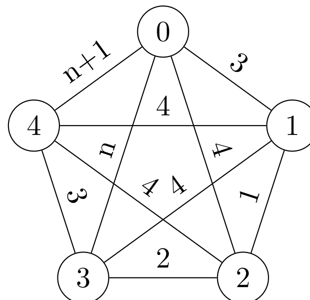
18. On créé un tableau qui contiendra le cycle final, et un pour garder en mémoire les sommets déjà intégrés au cycle. Il ne reste plus qu'à parcourir les sommets à partir de 0 (`c[0]` contiendra bien 0 vu l'initialisation de `c`) selon l'heuristique du plus proche voisin.

```c
int* PVC_glouton(int* G, int n)
{
    int* c = (int*)malloc(sizeof(int)*n);
    bool* vus = (bool*)malloc(sizeof(bool)*n);
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        c[i] = 0;
        vus[i] = false;
    }
    vus[0] = true;
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        c[i] = plus_proche(G, vus, n, c[i-1]);
        vus[c[i]] = true;
    }
    free(vus);
    return c;
}
```

19. Notons n le nombre de sommets du graphe en entrée de `PVC_glouton`. L'initialisation de `c` et `vus` se fait en temps $O(n)$ puis on fait $n-1$ appels à `plus_proche`, dont la complexité est clairement en $O(n)$. On obtient donc une complexité pour `PVC_glouton` en $O(n^2)$.

   Remarque : La complexité de cet algorithme est donc linéaire en la taille du graphe en entrée puisque ce dernier a n^2 arêtes étant donné qu'il est complet.

20. Pour tout $n \geq 5$, on considère l'instance G_n de `PVC` définie par le graphe suivant :



L'heuristique du plus proche voisin partant de 0 renvoie le cycle $(0, 1, 2, 3, 4)$ de poids $P_n = n + 10$. Mais dans G_n, le cycle $(0, 1, 4, 3, 2)$ a pour poids 14 ce qui garantit que le poids minimal $P_n^\star$ d'un cycle hamiltonien dans G_n est inférieur à 14.

S'il existait $\alpha \geq 1$ tel que `PVC_glouton` soit une α-approximation pour `PVC`, on aurait pour tout $n \geq 5$, $P_n \leq \alpha P_n^\star$. Mais c'est impossible puisque $P_n / P_n^\star \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ d'après ce qui précède.

Remarque : C'est cohérent avec le résultat de la partie 2.3 !

21. Avec les notations introduites à la question 20, le graphe G_{100} fournit un exemple convenable :

Sommet de départ	Cycle C obtenu par `PVC_glouton`	Poids de C
0	$(0, 1, 2, 3, 4)$	110
1	$(1, 2, 3, 4, 0)$	110
2	$(2, 1, 0, 3, 4)$	111
3	$(3, 2, 1, 0, 4)$	110
4	$(4, 3, 2, 1, 0)$	110

Comme le cycle $(0, 1, 4, 3, 2)$ est de poids 14, il est certain qu'aucun des cycles précédents n'est de poids minimal et donc l'heuristique du plus proche voisin échoue à trouver un cycle hamiltonien de poids minimal pour chacun des sommets de départ.

Remarque : On vient d'ailleurs de montrer qu'il existe des instances pour lesquelles, quel que soit le sommet de départ, le poids du cycle calculé via l'heuristique du plus proche voisin peut être aussi éloigné du poids optimal que souhaité. On pouvait espérer qu'au moins l'un des n cycles calculés via cette heuristique ait un poids faible : il n'en est en fait rien.

22. Soit $a = (s, t) \in A$. Par l'inégalité triangulaire, $f(s, t) \leq f(s, t) + f(t, t)$ donc $f(t, t) \geq 0$. Toujours par l'inégalité triangulaire, on a :

$$0 \leq f(t, t) \leq f(t, s) + f(s, t) = 2f(s, t) \text{ puisque le graphe est non orienté, donc } f(s, t) \geq 0.$$

23. Comme $c^\star$ est un cycle hamiltonien, si on supprime une arête a de $c^\star$, on obtient un arbre couvrant T' de G. Comme T est un arbre couvrant minimal, on a donc :

$$f(T) \leq f(T') = f(c^\star) - f(a) \leq f(c^\star)$$

la dernière inégalité provenant de ce que $f(a) \geq 0$ d'après la question 22.

24. On propose l'algorithme suivant pour calculer un tel cycle :

    - Calculer un arbre couvrant minimal T de G ce qui peut se faire en $O(|A| \log |S|)$ opérations avec l'algorithme de Kruskal.
    - Calculer un parcours préfixe des sommets de T (peut se faire en $O(|S|)$ opérations) et renvoyer les sommets dans cet ordre. Ceci produit un cycle c_T hamiltonien puisque G est complet.

    Cet algorithme est effectivement polynomial en la taille de G.

    Par ailleurs, $f(c_T) \leq 2 \times f(T)$. D'après la question 23, on a ainsi $f(c_T) \leq 2f(c^\star)$ ce qui conclut.

    Exo : Montrer rigoureusement que $f(c_T) \leq 2f(T)$. Le point critique est l'utilisation de l'inégalité triangulaire. S'aider d'un dessin et constater que ce dernier est bien plus parlant qu'une preuve.

25. On suit le principe exposé dans la question 24 : on calcule un arbre couvrant minimal à l'aide de `acm` puis on effectue un parcours en profondeur sur cet arbre en stockant les sommets dans `cT` dans l'ordre dans lequel ils sont découverts.

```
let pvc_approx (g:graphe) :graphe =
  let n = Array.length g in
  let vus = Array.make n false in
  let cT = Array.make n 0 in
  let arbre = acm g in
  let i = ref 0 in
  let rec parcours_pronfondeur (s:int) =
    if not vus.(s) then begin
        vus.(s) <- true;
        cT[!i] = s;
        i := !i +1;
        List.iter parcours_profondeur arbre.(s)
      end
  in
  parcours_profondeur 0;
  cT
```

La question 24 assure que cette fonction renvoie une 2-approximation du cycle hamiltonien optimal en temps polynomial en la taille du graphe en entrée.

26. On procède par double implication. Si G possède un cycle hamiltonien alors ce cycle est toujours un cycle hamiltonien dans K_G et il emprunte $|S|$ arêtes (puisque $|S| > 2$) qui sont toutes de poids 1 donc son poids est $|S| \leq \alpha|S|$ puisque $\alpha > 1$.

    Réciproquement, supposons que K_G admet un cycle hamiltonien de poids inférieur ou égal à $\alpha|S|$. Ce cycle implique au moins deux arêtes (puisque $|S| > 2$). S'il empruntait au moins une arête de poids $\alpha|S|$, alors son poids serait au moins égal à $\alpha|S| + 1$ ce qui est une contradiction. On en déduit que ce cycle n'emprunte que des arêtes de poids 1 donc que ce cycle existe dans G.

27. Voici dans ces conditions un algorithme polynomial résolvant `CH`. Si G est une instance de `CH` :

    - Calculer K_G. Ceci peut se faire en temps $O(|S|^2)$ en parcourant S^2 et en vérifiant pour chaque couple (s, t) s'il correspond à une arête de G (ce qui peut se faire en temps constant si G est représenté par matrice d'adjacence).
    - Appliquer l'α-approximation de `PVC` à K_G : elle calcule un cycle hamiltonien c dans K_G en temps polynomial en $|K_G|$ donc en $|G|$ par hypothèse et tel que $f(c) \leq \alpha f(c^\star)$.
    - Si $f(c) \leq \alpha|S|$ alors G admet un cycle hamiltonien d'après la question précédente : on renvoie vrai. Sinon, $\alpha|S| < f(c) \leq \alpha f(c^\star)$ (par définition d'une α-approximation) donc $|S| < f(c^\star)$ et par conséquent il n'existe pas dans K_G de cycle hamiltonien qui ne passe que par des arêtes de poids 1, donc pas de cycle hamiltonien dans G non plus : on renvoit faux.

    Cet algorithme est bien polynomial en $|G|$ et résout `CH`. Si P $\neq$ NP, ceci est une contradiction car l'appartenance à P d'un problème NP-complet montre que ces deux classes sont égales. Si P $\neq$ NP, on vient donc de montrer qu'il n'existe aucune approximation à facteur constant pour `PVC`.