Problème n°0 « Technique de la feuille blanche »

Munissez-vous d'une feuille blanche et rédigez :

1) Théorème des valeurs intermédiaires
2) Théorème de Rolle
3) Théorème des accroissements finis.
4) DL de e^x, cos(x), sin(x), $\frac{1}{1-x}$ et ln(1-x)
5) Théorème de la bijection
6) Formules de cos(a+b) et sin(a+b)
7) Les expressions des suites récurrentes : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ selon l'équation caractéristique.
8) Définition d'un sous-groupe
9) Définition d'un sous-espace vectoriel
10) Définition de morphisme de groupe, isomorphisme de groupe, automorphisme de groupe.
11) Théorème du rang
12) Critère de Riemann pour une série
13) Règle de d'Alembert pour une série.
14) Formule du binôme de Newton
15) Définition d'une relation d'équivalence
16) Théorème fondamental de l'analyse permettant d'obtenir l'existence d'une primitive.
17) Définition d'une fonction dérivable en un réel « a »
18) Définition à l'aide de quantificateurs d'une fonction continue en « a »
19) Définition d'une fonction convexe, d'une fonction concave
20) Définition de matrices semblables, équivalentes, inversibles
21) Citer le théorème affirmant la dérivabilité d'une fonction réciproque, et donner cette dérivée.
22) Rappeler pour une suite récurrente, le lien entre monotonie de la suite et monotonie de l'itératrice.
23) Définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme. Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}, sur\ \mathbb{C}$
24) Soient (A,B)$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, et C=AB, donner l'expression de C_{ij}

Problème n°1 (Khal MPSI Wallon)

Soit F = {(x,y,z,t)$\in \mathbb{R}^4$ $tel\ que: x+2y+t=0\ et\ y-z+3t=0$}

Soit G = vect((1,1,0,1) ;(2,-1,2,0))

1) Montrer que F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, déterminer une base et sa dimension.
2) Même question avec G
3) F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4) Déterminer dans une base adaptée, la matrice de la projection sur G parallèlement à un supplémentaire de G.

Problème n°2 (Khal MPSI Wallon)

Les 4 questions sont indépendantes.

1) A) Déterminer la forme algébrique de $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

B) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

C) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$

D) Pour a$\in R$, exprimer cos(2a) en fonction de cos(a)

E) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12})$ est solution de l'équation $4x^2 = 2+\sqrt{3}$

F) Retrouver alors la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$

2) Linéariser l'expression $\sin(3x)\cos^2(x)$

3) A) Déterminer les racines carrées de 4+3i

B) Soit n un entier non nul, résoudre l'équation $z^{2n} = (4+3i)^n$ d'inconnue z$\in C$

4) A) Pour $\cos(\theta) \neq 0$, on définit : S=$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{cos^k\theta}$ et T = S=$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{cos^k\theta}$

Calculer S+iT

B) En déduire les valeurs de S et de T

Problème n°3

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite pseudo-magique s'il existe un réel S(A) tel que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} =$ S(A)

Soit E l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \ .)$
2) Montrer que A est pseudo-magique si et seulement s'il existe un réel μ tel que AJ=JA= μJ
3) Soit A une matrice de E inversible, montrer que S(A)≠0, montrer que A^{-1} appartient à E. Que vaut S(A^{-1}) ?

Problème n°4 (Khal Châtelet)

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par f(0) = 1 et $\forall t \neq 0, f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$
   a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et paire.
   b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
   c) En déduire que f est dérivable en 0, et donner f '(0)
   d) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour t≠ 0, calculer f '(t)
   e) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{-1}{2}t^2 f'(t)$
   f) En déduire le sens de variation de f.
2) Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(0)$=1 et $\forall x \neq 0$, φ(x) = $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$
   a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
   b) Montrer que pour tout x réel, f(x)≤ $\varphi(x) \leq 1$ (on pourra commencer par supposer x>0)

c) Montrer que pour tout réel x non nul, $\varphi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$
d) Montrer que φ est dérivable en 0, et que $\varphi'(0) = 0$
e) Donner les variations de φ
f) Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$
g) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$

<u>Problème n°5 (Khal Châtelet)</u>

Notations : $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ désignent respectivement le corps des réels et celui des complexes.

On pose: I=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, J=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, K = $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, et L= $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Pour A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose σ(A) = $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et r(A) = a+d

1) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2) Etablir que (I,J,K,L) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3) Donner la matrice représentative de σ dans cette base.
4) Soit (A,B)$\in$ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$, montrer que σ(AB) = σ(B) σ(A)
5) Justifier que pour A$\in$ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, A$\sigma$(A) = Det(A)$I_2$
6) Montrer que si A est inversible alors σ(A) l'est également.
7) Exprimer $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A.
8) Vérifier que r est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
9) Soit A$\in$ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, exprimer σ(A) à l'aide de A, I et r(A)

<u>Problème n°6 (Khal Châtelet)</u>

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on considère l'équation différentielle :

(E) : (1 - e^{-x})y'(x)+y(x) = $\varphi(x)$

On définit les fonctions F et G *de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$ par : G(x) = $\int_0^x e^t \varphi(t)dt$ et F(x) = $\frac{G(x)}{e^x-1}$

1) Montrer que F et G sont des applications C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$
2) Déterminer le développement de Taylor de G à l'ordre 2.
3) En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 :
   F(x) = $\varphi(0)+\frac{x}{2}\varphi'(0)$+o(x)
4) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction ainsi prolongée.
5) Préciser alors F(0)
6) Démontrer que F est dérivable en 0 et préciser F'(0)
7) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle : (E_0) : (1 - e^{-x})y'(x)+y(x) = 0
8) Montrer que F vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$
9) a) Exprimer la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$
   b) Vérifier que F est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant une limite finie en 0.

Problème n°7 (Prépa INP)

Soit B=(1,X,X^2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1) Soit f : $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], P \to \frac{1}{2}[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)]$
   a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
   b) Ecrire la matrice représentative de f dans B
   c) Justifier que f soit bijective.
2) Soit φ: $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, P→P(1), on admet que φ est linéaire
   a) Déterminer dim(Ker(φ))
   b) Donner une base de Ker(φ)
3) Soit A∈ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec A $= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, on note B'=(1,1-2X,1-6X+6X^2)
   a) Justifier que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   b) Ecrire la matrice représentative de f dans B'
   c) Ecrire la matrice de passage Q de B à B'
   d) Justifier que Q est inversible
   e) Montrer que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$,

Problème n°8 (Prépa INP)

On considère les polynômes P=$X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 2X^2 - 1$ et Q=$X^4 + X^2$

1) Effectuer la division euclidienne de P par Q
2) Factoriser Q en produit de polynômes irréductibles de ℝ[X]
3) Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$
4) Calculer la valeur de I $= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^4+3x^3+2x^2-1}{x^4+x^2}\,dx$

Problème n°9 (Prépa INP)

L'objectif de ce problème est de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

On introduit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1) Soit p un entier, tel que p>0, montrer que $\frac{1}{p^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(pt)\,dt$
2) En déduire que pour tout entier n>0, $S_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,dt$
3) Soit t=0, calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$
4) Soit t∈$]0,\pi]$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}})$

5) En déduire que $\forall t \in [0,\pi], \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \varphi_n(t)$ avec $\varphi_n \begin{cases} \frac{-1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & si\ t \in]0,\pi] \\ n\ si\ t = 0 \end{cases}$

6) Pour n>0, on définit f_n sur $[-\pi, 0[\cup]0,\pi]$ par $f_n : t \to \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

   Montrer que f_n peut se prolonger par continuité sur $[-\pi,\pi]$, on appellera encore f_n ce prolongement.
   Préciser $f_n(0)$

7) Montrer que f_n est dérivable en 0.

Problème n°10

On considère les matrices suivantes :

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } Q=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Soit n un entier naturel non nul, déterminer l'expression de D^n
2) On souhaite démontrer que P est inversible de trois façons différentes :
   a) Méthode n°1 : Déterminer le rang de P et conclure.
   b) Méthode n°2 : Calculer le produit PQ et conclure.
   c) Méthode n°3 : En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, déterminer par le même coup P^{-1}
3) Pour n entier non nul, démontrer, par récurrence, que $M^n = PD^nP^{-1}$
4) En déduire l'expression de M^n sous forme matricielle.
5) On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par : $u_0=0$, $v_0=0$, $w_0=1$ et $\forall n \epsilon \mathbb{N}$,
   $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+2w_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{2} \\ w_{n+1} = \frac{u_n+2w_n}{4} \end{cases}$
   On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$
   Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n
6) a) En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   b) Déterminer l'expression de (u_n), (v_n) et (w_n) en fonction de n.
   c) Déterminer les limites de (u_n), (v_n) et (w_n)

Problème n°11

Dans ce problème, I désigne l'intervalle $]-\infty, 0[\ ou\ ]0, +\infty[$

On considère l'équation différentielle (1) : $xy''+2y'-xy = 4xe^x$ où y désigne une fonction réelle de la variable x, définie sur I.

1) Pour $x \in I$, on pose $z(x)=xy(x)$

Montrer que $x \to y(x)$ est solution de (1) si et seulement si $x \to z(x)$ est solution d'une équation différentielle (2) que l'on précisera.

2) On cherche ici une solution particulière de l'équation différentielle (2). On se propose de la déterminer sous la forme $x \to P(x)e^x$ où P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$
   a) Montrer que si P existe, alors $\deg(P)=2$
   b) En déduire la solution particulière sous la forme souhaitée.
3) Résoudre sur I, l'équation différentielle (2)
4) En déduire la résolution sur I de l'équation différentielle (1)
5) On souhaite déterminer ici les solutions $x \to y(x)$ de l'équation (1) mais définies sur $\mathbb{R}$
   a) Chercher les solutions qui vérifient l'équation en x=0, continues et deux fois dérivables en 0.
   b) Indiquer si elle existe la solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0)=0$

Problème n°12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\cos^2(x)}{x^2}$

1) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2
2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0, on notera encore f ce prolongement
3) La fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f, et la position de la tangente en 0 par rapport à la courbe.

Problème 13

On définit la suite (u_n) par : $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Justifier que la suite est bien définie. La suite est-elle bornée ?
3) Démontrer que les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones, et préciser leur sens de variation.
4) Démontrer que les suites u_{2n} et u_{2n+1} convergent et préciser leur limite.
5) Que peut-on en conclure quant à la suite (u_n) ? Déterminer la limite de (u_n)

Problème n°14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$

Soit $g : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x\int_x^{2x} (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}})dt$

1) Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
2) Montrer que $f'(x) = \frac{3(1-x^4)}{\sqrt{4+x^4}\sqrt{1+4x^4}(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4})}$
3) Montrer que f est impaire
4) Montrer que : $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$
5) Donner le DL de f en 0 à l'ordre 1 et en déduire une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
6) Pour x>0, donner un encadrement de f(x), en déduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(On pourra utiliser une fonction qui majore t→ $\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$)

7) En déduire le tableau de variations de f.
8) Montrer que pour tout t∈ $\mathbb{R}^{*+}$, $0\leq \frac{1}{t^2}-\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\leq \frac{2}{t^6}$
9) En déduire que pour tout x>0, $0\leq g(x)\leq \frac{31}{80x^4}$

Problème n°15

Les deux questions sont indépendantes :

1) Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.
   a) Factoriser le polynôme $P = X^{2n+2} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
   b) Factoriser le polynôme $P = X^{2n+2} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$
   c) Simplifier $(X^2-1)\sum_{k=0}^{n} X^{2k}$
   d) En déduire la factorisation de $Q=\sum_{k=0}^{n} X^{2k}$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$
2) Soit $(a,b)\in \mathbb{R}^2$, soit $P=2X^4+5X^3+5X^2+aX+b$
   a) Déterminer a et b pour que P(-1)=P'(-1)=0
   b) Déterminer l'ordre de multiplicité de -1 pour P
   c) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^2$
   d) Justifier que le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^3$ est $2(X+1)^2$.
   Que vaut le quotient ? On pourra utiliser la formule de Taylor.

Problème 16 (INP 2023)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+\arctan(x)y = xe^{-x\arctan(x)}$ où y désigne une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

1) Justifier l'existence de la primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
2) A l'aide d'une IPP, déterminer cette primitive .
3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$
4) Trouver la solution y de (E) vérifiant y(0)=1
5) On cherche à présent à étudier localement en 0 et en $+\infty$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x^2)e^{-x\arctan(x)}$
   a) Déterminer le DL à l'ordre 3 de la fonction arctan en 0
   b) En déduire un DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction f
   c) Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe en 0. Préciser la position de la tangente par rapport à la courbe.
   d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$
   e) A l'aide d'un développement asymptotique à l'ordre 0 en $+\infty$, donner un équivalent de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra poser $x=\frac{1}{h}$ avec $h\to 0^+$)

Problème n°17

1) Enoncer précisément le théorème du rang.
2) On considère un K-espace vectoriel E de dimension quelconque et f∈L(E)
   a) Démontrer que $Ker(f)\subset Ker(f^2)$
   b) Démontrer que $Im(f^2)\subset Im(f)$
3) Démontrer que $Ker(f)\cap Im(f)=\{0_E\}\Leftrightarrow Ker(f)=Ker(f^2)$

4) Démontrer que E=Ker(f)+Im(f)$\Leftrightarrow$Im(f^2)=Im(f)
5) On suppose à présent que E est de dimension finie,
montrer que E=Ker(f)$\oplus$Im(f) $\Leftrightarrow$Ker(f)=Ker(f^2)
6) A l'aide de l'application m : K[X]→K[X], P→XP
Montrer que le résultat établi à la question 5) est faux en dimension infinie !

<u>Problème n°18</u> (INP 2023)

Soit n$\in \mathbb{N}$, soit E_n l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme P$\in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, f(x) = P(x)e^x

Pour tout i$\in [\![0,n]\!]$, on note b_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i e^x$

1) Montrer que E_n est un espace vectoriel
2) Montrer que $B_n=(b_0,\dots,b_n)$ est une base de E_n
3) Quelle est la dimension de E_n ?
4) Montrer que : ∂ : f→f ' est un endomorphisme de E_n
5) Donner la matrice A de ∂ relativement à B_n
6) Est-ce que ∂ est un isomorphisme ?
7) Pour n entier naturel non nul, on note I_n la matrice identité et J_n la matrice d'ordre n définie par :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base C_n de E_n dans laquelle la matrice de ∂ est B=I_{n+1}+J_{n+1}

8) On suppose dorénavant que n=2, l'espace E_2 est muni de la base $C_2=(c_0,c_1,c_2)$ où $c_i(x)=\frac{x^i}{i!}e^x$
   a) Pour tout entier naturel k, calculer B^k
   b) Exprimer b_2 dans la base C_2
   c) En déduire la dérivée k-ième de la fonction b_2

<u>Problème n°19</u>

Soit E = $\mathbb{R}^3$ et soit f : E→E, (x,y,z) →(-y+z,-x+z,-x-y+2z)

1) Justifier que f est un endomorphisme de E.
2) Donner une base et la dimension de Ker(f)
3) Donner une base et la dimension de Im(f), peut-on dire que f est un automorphisme de E ?
4) Démontrer que : E = Ker(f) $\oplus$Im(f)
5) Soit B=(u_1 ;u_2 ; u_3) une base adaptée à la décomposition en somme directe $u_1\in$Ker(f). Déterminer la matrice de f dans B
6) Démontrer que f est un projecteur
7) Démontrer que f admet au moins une racine carrée, c'est-à-dire un endomorphisme g tel que g^2=f (avec g^2=gog)

<u>Problème n°20</u>

1) Montrer que l'équation sh(x)=1 admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$
2) Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_0^\alpha sh^n(t)dt$
   a) Déterminer le sens de variation de la suite I_n
   b) Sans déterminer sa limite, démontrer que I_n est convergente.
   c) A l'aide d'une IPP, montrer que pour tout entier naturel n :
   $(n+2)I_{n+2} = ch(\alpha) - (n+1)I_n$
   d) En déduire la limite de I_n

Problème n°21

On considère la fonction f : $\mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}, x \to x + \ln(x)$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$.
2) Dresser le tableau de variations de sa bijection réciproque f^{-1}
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation f(x)=n admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$. On notera x_n cette unique solution.
4) Montrer que : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer sa limite
5) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n}$
6) En déduire que : $x_n \sim n \; pour \; n \to +\infty$
7) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$
8) Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n)$

Problème n°22

On considère I=]0,1[et J=]1,+∞[

Pour x∈I∪J, on pose f(x) $= \frac{1}{\ln(x)}$ et φ(x)$=\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$

1) Justifier que f est bien définie sur I∪J
2) Justifier que f admet des primitives sur I∪J, on appellera F cette primitive
3) Justifier que φ est bien définie sur I et sur J, préciser son signe sur I et sur J.
4) Justifier que φ est dérivable sur I∪J et que $\forall$x $\in$ I $\cup$ J, $\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$
5) Déterminer les variations de φ sur I et sur J
6) Soit x $\in$ I $\cup$ J, on pose ψ(x) $= \int_x^{x^2} \frac{1}{tlnt} dt$ (on admet que cette intégrale est bien définie)
   Montrer que x $\in$ I $\cup$ J, ψ(x) =ln(2)
7) Montrer que : $\forall x \in$J, $\frac{\varphi x)}{x^2} \leq \psi$(x)$\leq \frac{\varphi(x)}{x}$
   On admettra que : $\forall x \in$I, $\frac{\varphi x)}{x} \leq \psi$(x)$\leq \frac{\varphi(x)}{x^2}$
8) En déduire un encadrement de φ sur J puis sur I
9) Démontrer que φ est prolongeable par continuité en 1. On appellera encore φ ce prolongement.
10) Démontrer que φ(x) $=_{x\to1} \ln(2) + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$
11) En déduire que φ est dérivable en 1, donner une équation de sa tangente en ce point, et préciser la position de la tangente par rapport à la courbe représentative de φ