TD 1

Ondes mécaniques

Exercice 1 : Applications directes du cours

1. Donner deux exemples d'ondes mécaniques transversales, et deux exemples d'ondes mécaniques longitudinales.
2. Quelle est la différence fondamentale entre les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques ?
3. Définir la notion de double périodicité d'une onde. Quelle relation lie les deux périodes ?
4. Expliquer ce qu'est la propagation d'un son.
5. On dispose d'un tuyau de canalisation en cuivre de longueur L = 375 m. Une personne A, située à l'une des extrémités du tuyau, frappe un coup à l'aide d'un marteau. Une seconde personne B, située à l'autre extrémité du tuyau, perçoit deux coups décalés d'une durée τ =1,0 s. Calculer la célérité du son dans le cuivre.
6. On remplace le tuyau en cuivre par un tuyau en aluminium de même longueur. Comment évolue le décalage temporel τ' des deux coups perçus par la personne B ?

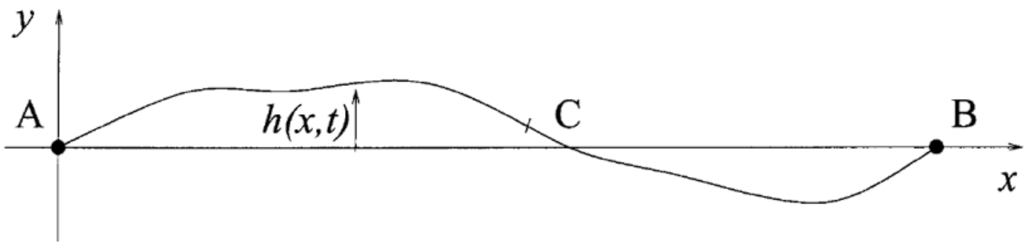
V air = 340 $m.s^{-1}$; le cuivre est moins rigide que l'aluminium

Exercice 2 : Corde vibrante. Ondes progressives, ondes stationnaires.

Une fine corde métallique homogène, quasi inextensible et sans raideur, de masse linéique μ, est soumise à une tension d'équilibre T. Ses déformations dans le plan (x, y) sont décrites par une fonction de hauteur $y = h(x,t)$. Dans tout l'exercice, les déformations de la corde par rapport à l'horizontale sont supposées suffisamment faibles pour que :

- L'angle $\alpha(x,t)$ que fait la courbe h avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}$.
- Les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisses respectives x_A et x_B. Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse x_C. Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.



1. Soit un point O d'abscisse x_0 situé dans l'intervalle [AB] ($x_A < x_O < x_B$). La partie de la corde située à droite du point O exercice à chaque instant une force $\vec{F}(x_O,t)$.
   Comment s'exprime, en fonction de T et d'une dérivée de h la composante verticale de cette force $\vec{F}$?
2. Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par $h(x,t)$. Exprimer la célérité c associée en fonction des paramètres μ et T.

Dans un premier temps, l'extrémité de la corde en B est laissée libre et on impose en A un mouvement sinusoïdal :

$$h(x_A,t) = H_0 \cos\omega t$$

3. Sous quelle forme peut-on chercher les solutions de l'équation de d'Alembert $h(x,t)$ en un point quelconque de la corde ?

4. On suppose que la propagation se fait de A vers B. Que devient l'expression précédente ? (Justifier)
5. Comment appelle-t-on le type d'onde mécanique obtenu ?

La corde est à présent fixée en ses deux extrémités A et B. La longueur de corde entre ces deux points est notée $2L$. On pince la corde entre les points A et B de manière à générer une perturbation.

6. Quel phénomène nouveau apparaît par rapport au cas précédent ?
7. Montrer qu'il est possible de rechercher les solutions de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$h(x,t) = H_0 \cos(\omega t) \cdot \sin(kx + \phi)$$

8. Comment appelle-t-on le type d'onde obtenu ?
9. Donner, en la démontrant, la relation existant entre ω, k et c.
10. Les valeurs admissibles de k (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes k_n où n=1,2,3 … est un entier positif.
    Donner l'expression des k_n admissibles, des pulsations propres ω_n et des fréquences f_n associées. Comment choisir la phase Φ ?
11. Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1 telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide.
    Tracer de la même façon l'allure des déformations associées aux trois premières harmoniques (k_2, k_3, k_4).
    Compter à chaque fois les ventres et les nœuds associés à ces modes de vibration.

Exercice 3 : Corde de Melde

1) Corde de Melde : lors d'une manipulation avec la corde de Melde, on trouve les résultats ci-dessous :

a) Pour une même longueur de la corde L et une même masse M accrochée à celle-ci, on obtient les résultats suivants :

*** Fréquence de résonance 19 Hz pour deux fuseaux.

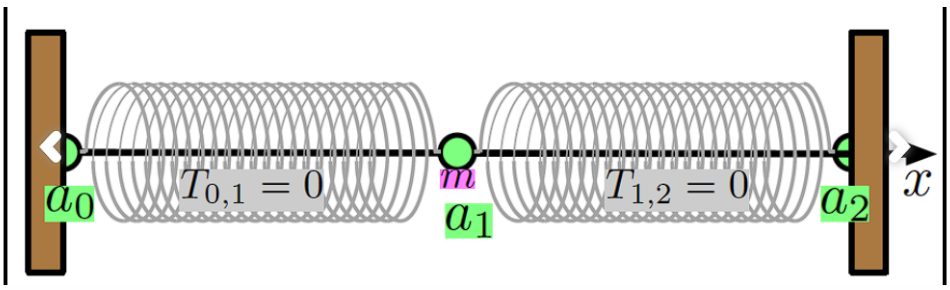
*** Fréquence de résonance 28 Hz pour trois fuseaux.

Ces valeurs numériques sont-elles compatibles entre elles ? Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?

b) La longueur de la corde est L = 117 cm. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation sur cette corde ?

c) La masse M accrochée à cette corde est égale à M=25 g. Quelle est la tension de la corde ? En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

Exercice 4 : une masse et deux ressorts

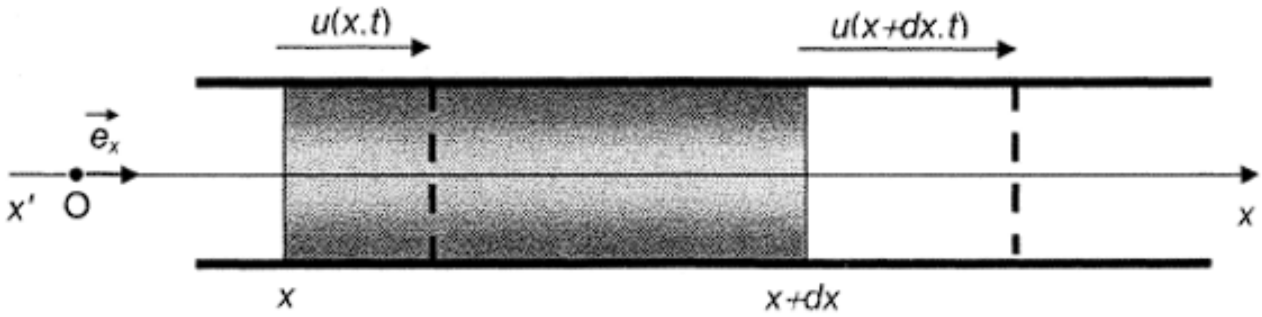


On considère une masse ponctuelle de position $x_1(t)$ et de masse m, fixée à deux ressorts de masses négligeables et d'extrémités fixes en $x = a_0$ et $x = a_2$. Au repos, la masse est en $x = a_1$ et les ressorts, identiques, sont de longueurs égales $l = l_{0,1} = l_{1,2}$. Les ressorts ont un coefficient de raideur k.

1. Exprimer les déplacements $\xi_0(t), \xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ en fonction des données.
2. Exprimer l'allongement des ressorts en fonction de ces déplacements, puis en fonction de $x_1(t)$ et a_1.
3. Exprimer la force F_1^- exercée par le ressort de gauche sur la masse.
4. Exprimer la force F_1^+ exercée par le ressort de droite sur la masse.
5. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m.
6. En déduire la pulsation ω de l'oscillation.
7. On suppose que $\xi_1(0) = u$ et $\dot{\xi}_i(0) = 0$. En déduire l'expression de $\xi_1(t)$ pour tout temps t.

Exercice 5 : Propagation du son dans un fluide parfait

On considère un tuyau cylindrique de section S_0 constante et d'axe $x'x$ contenant un fluide parfait compressible :



La masse volumique du fluide au repos est ρ_0, sa pression P_0 et sa température T_0. L'équilibre est perturbé par le passage d'une onde acoustique se propageant selon les x croissants. Dans le milieu perturbé on note :

- $u(x,t)$: déplacement à l'instant t du fluide situé au repos à l'abscisse x
- $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ avec $|p(x,t)| \ll P_0$
- $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ avec $|\rho_1(x,t)| \ll \rho_0$
- $v(x,t)$: vitesse acoustique ou vitesse vibratoire en un point d'abscisse x

$$\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}\vec{e}_x$$

L'étude sera effectuée dans le cadre de l'approximation acoustique, limitée aux mouvements de faible amplitude : les grandeurs u, v, p et ρ_1 sont des infiniment petits du même ordre (ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles). Les calculs seront effectués à l'ordre 1 en ces infiniment petits.

Enfin, le mouvement du fluide est décrit sans prendre en compte les phénomènes dissipatifs (viscosité) et les échanges thermiques : on peut donc considérer que les perturbations locales sont isentropiques.

Le coefficient de compressibilité isentropique du fluide s'écrit :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$$

1. Rappeler les conditions pour qu'une transformation puisse être considérée comme isentropique.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide de volume $S_0 dx$ subissant la perturbation, établir à l'ordre 1 l'équation différentielle suivante :
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$
3. Exprimer l'accroissement relatif δV du volume de fluide entre l'état de repos et l'état perturbé au temps dt. En déduire les relations suivantes : $p(x,t) = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial v}{\partial x}$
4. Etablir l'équation de propagation relative à la surpression $p(x,t)$:
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$
Donner l'expression de la célérité (vitesse de propagation) c de l'onde acoustique en fonction de χ_S et ρ_0.

5. Le fluide est de l'air assimilé à un gaz parfait à la température $T_0 = 293\ K$. Après avoir déterminé χ_S en fonction du rapport γ des capacités thermiques du gaz et de la pression P_0, établir l'expression de c en fonction de T_0, γ, la masse molaire M du fluide et la constante R des gaz parfaits.

Exercice 6 : Impédance acoustique et intensité sonore

Une onde progressive acoustique se déplace dans le sens des x croissants au sein d'une conduite de section S_0 (voir exercice précédent). Le déplacement est de la forme $u(x,t) = U_0 \cos\ \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$.

L'impédance caractéristique Z **du fluide** est définie par le rapport :

$$Z = \frac{p(x,t)}{v(x,t)}$$

L'impédance caractéristique Z_a **de la conduite** est définie par le rapport :

$$Z_a = \frac{p(x,t)}{S_0 v(x,t)}$$

1. Montrer que l'impédance caractéristique du fluide est une constante Z_c à préciser en fonction de ρ_0 et c. Préciser sa valeur dans le cas de l'air ($\rho_{air} = 1{,}3\ kg \cdot m^{-3}$ à 20 °C).
2. Comparer, à partir d'un raisonnement qualitatif, les impédances caractéristiques d'un gaz, d'un liquide et d'un solide.
3. Donner l'expression de l'impédance acoustique Z_a d'un tuyau sonore cylindrique en fonction de sa section S_0, ρ_0 et c.

La puissance sonore instantanée $\mathcal{P}(x,t)$ transportée par l'onde à travers la surface $\vec{S} = S\vec{e}_x$ orthogonale à la direction de propagation est définie par :

$$\mathcal{P}(x,t) = \vec{\pi}(x,t) \cdot \vec{S}$$

Où $\vec{\pi}(x,t)$ est le vecteur densité volumique de courant d'énergie : $\vec{\pi}(x,t) = p(x,t)\vec{v}(x,t)$.

L'intensité $I(x)$ de l'onde sonore est par définition la valeur de la puissance moyenne temporelle transférée par l'onde sonore à travers une surface unitaire d'abscisse x :

$$I(x) = \langle \pi \rangle$$

Si $a(M)$ et $b(M)$ sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ leurs représentations complexes associées, alors la valeur moyenne temporelle du produit $a(M) \cdot b(M)$ vaut :

$$\langle a \cdot b \rangle = \frac{1}{2}\ \mathcal{R}e(\underline{a} \cdot \underline{b}^*)$$

L'émetteur, en $x = 0$ génère une vibration sinusoïdale de pulsation ω de la forme :

$$u(0,t) = U_m \cos \omega t$$

L'onde qui se propage le long du tuyau supposé infini est représentée par :

$$u(x,t) = U_m \cos(\omega t - kx)$$

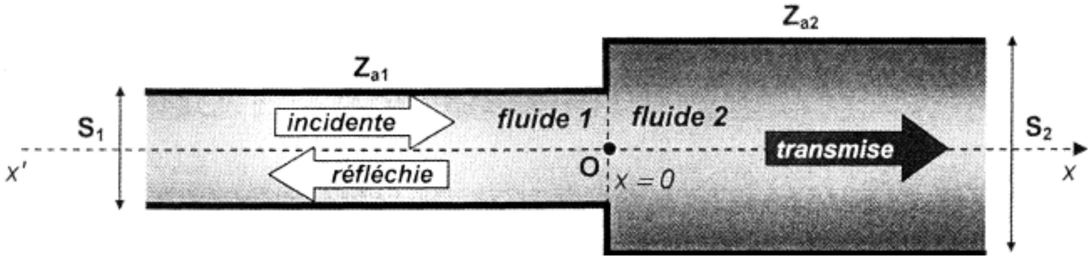
4. Déterminer le nombre d'onde k en fonction de ω et c. Que représente-t-il ? Retrouver, en fonction de ρ_0 et c, l'expression de l'impédance caractéristique du fluide en utilisant la notation complexe. Déterminer les valeurs maximales P_m et V_m de p et v en fonction de ω, ρ_0, c et U_m.
5. Quelle est l'expression de l'intensité acoustique pour l'onde progressive harmonique en fonction de P_m et de Z ?

6. Exprimer la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ transportée à travers une conduite de section constante S_0 en fonction de P_m et de l'impédance acoustique de la conduite Z_a.

Exercice 7 : Réflexion et transmission des ondes acoustiques

Une conduite est constituée de deux tubes cylindriques de sections respectives S_1 et S_2, de même axe x, et séparés par le plan $x = 0$. Deux fluides non miscibles se répartissent de part et d'autre de ce plan.

- $x < 0$: le fluide 1 est de masse volumique ρ_1 ; le son s'y propage à la célérité c_1
- $x > 0$: le fluide 2 est de masse volumique ρ_2 ; le son s'y propage à la célérité c_2



Les impédances acoustiques des deux tubes sont définies par les relations :

$$Z_{a1} = \frac{Z_1}{S_1} = \frac{\rho_1 c_1}{S_1}$$

$$Z_{a2} = \frac{Z_2}{S_2} = \frac{\rho_2 c_2}{S_2}$$

Et on note :

$$\alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}$$

Une onde de pression harmonique progressive incidente $p_i(x,t)$ se propage dans le milieu 1 selon les x croissants. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement donne naissance en $x = 0$ à :

- Une onde de pression transmise dans le milieu 2 : $p_t(0,t)$ dont la puissance est $\mathcal{P}_t$
- Une onde de pression réfléchie dans le milieu 1 : $p_r(0,t)$ dont la puissance est $\mathcal{P}_r$

Les pressions acoustiques incidente, transmise et réfléchie s'expriment par :

$$p_i(x,t) = P_{im} \cos \omega (t - \frac{x}{c_1}) \qquad p_t(x,t) = P_{im} \cos \omega (t - \frac{x}{c_2}) \qquad p_r(x,t) = P_{im} \cos \omega (t + \frac{x}{c_1})$$

La puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_i \rangle$ est associée à l'onde incidente. Les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance sont définis par les valeurs absolues des rapports des puissances moyennes transportées :

$$R = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right| \qquad \text{et} \qquad T = \left| \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} \right|$$

1. Montrer que le déplacement incident, correspondant à $p_i(x,t)$, s'écrit sous la forme :

$$u_i(x,t) = U_{im} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

   Exprimer U_{im} en fonction de P_{im}, ω, c_1 et ρ_1.

2. Donner les puissances moyennes transportées $\langle \mathcal{P}_i \rangle$, $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ et $\langle \mathcal{P}_t \rangle$ en fonction de P_{im}, P_{rm}, P_{tm}, et des impédances acoustiques des tubes, notées Z_{a1} et Z_{a2}.

3. Énoncer, en les justifiant, les conditions de passage de l'onde à l'interface des deux fluides. En déduire deux équations reliant P_{im}, P_{rm}, P_{tm}, et α.
4. Déterminer, en fonction de α, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de pression :

$$r_P = \frac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)} \qquad \text{et} \qquad t_P = \frac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$$

5. Exprimer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance à travers l'interface en fonction du seul coefficient α. Quelle relation existe-t-il entre R et T ? Que traduit-elle ?

Influence des deux milieux pour une conduite de section constante : $S_1 = S_2 = S_0$

6. Le milieu 2 est l'air, l'impédance caractéristique Z_{air2} et le milieu 1 l'intérieur du corps humain dont les constituants sont caractérisés par une impédance $Z_{corps1} \gg Z_{air2}$. Evaluer r_p et t_p, puis T et R. Commenter. Calculer l'atténuation en décibel $T_{dB} = 10 \log T$, correspondant au coefficient de transmission T=1,7.10^{-3}. Pourquoi le médecin utilise-t-il un stéthoscope pour écouter les battements cardiaques ou les murmures respiratoires ?

Influence du raccordement des deux conduites pour un fluide unique : $\alpha = \frac{S_2}{S_1}$

Un fluide de masse volumique au repos ρ_0 dans lequel le son se propage à la célérité c occupe la conduite constituée des deux tubes de sections différentes S_1 et S_2. La discontinuité de l'impédance au niveau de raccordement est due au changement de section.

7. Tracer l'allure de la fonction $R(\alpha)$. Pour quelle valeur de α y a-t-il adaptation de l'impédance ? Commenter les cas limites : $S_2 \ll S_1$ et $S_2 \gg S_1$.

<u>Exercice n° 01 :</u>

Une onde plane progressive sinusoïdale transverse se propage dans l'air avec une célérité c.

1) Donner la puissance moyenne P_m traversant une surface S perpendiculairement à cette onde. On exprimera le résultat en fonction de S, ρ_0 (masse volumique de l'air), c et P_0.

L'air est assimilé à un gaz parfait pour lequel $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ et $P_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

Calculer la valeur efficace de la surpression acoustique pour une intensité de l'onde égale à $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W.m^{-2}}$.

2) Un réacteur d'avion à $20\,\mathrm{m}$ émet un «son» correspondant au seuil de douleur pour l'oreille. On associe à ce signal un niveau de 120dB, la référence étant I_0. Quelle est l'intensité correspondante ? Quelle est la puissance émise dans tout l'espace par une telle source (on adoptera, pour simplifier, le modèle d'une source sphérique) ?

<u>Données :</u>

$R = 8,31\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$, M(masse molaire de l'air)$= 29.10^{-3}\,\mathrm{kg.mol^{-1}}$, $\gamma = 1,4$.

<u>Exercice n° 02 :</u>

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur $\ell = 1,00\,\mathrm{m}$ fermé à l'une de ses extrémités et ouvert à l'autre.

Les pression, température, et masse volumique moyennes de l'air contenu dans le tuyau sont $P_0 = 1,013.10^5\,\mathrm{Pa}$, $T_0 = 290\,\mathrm{K}$ et $\rho_0 = 1,22\,\mathrm{kg.m^{-3}}$.

1) Déterminer les fréquences ν_0 du fondamental et ν_1 de la première harmonique. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = C_p/C_v = 1,40$.

2) A la fréquence ν_1 on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l'air égale à $a_0 = 1\,\mathrm{mm}$. En déduire l'amplitude maximale correspondante :

- p_0 pour la surpression,
- τ_0 pour la température.