Ondes mécaniques

Le phénomène de propagation d'ondes est un phénomène très général. Son importance pratique est considérable, car il est à la base de nombreux cas de transmission d'informations. Cette information se concrétise sous la forme d'un **signal physique**, dont on mesure les perturbations au cours du temps ou dans l'espace. C'est la propagation de ce signal sous forme d'une onde qui permet précisément la transmission de l'information. Les ondes sont de différentes natures suivant la nature physique du signal : ondes lumineuses, ondes radios, ondes wifi, son...

Dans ce chapitre nous étudierons les phénomènes ondulatoires en prenant l'exemple des ondes mécaniques, dont les ondes sonores font partie.

1. L'onde : la propagation d'un signal

1.1. Qu'est-ce qu'un signal ? Qu'est-ce qu'une onde ?

DEFINITIONS

Un **signal** est une grandeur physique mesurable qui permet d'obtenir une information. Le signal est nul au repos et devient non nul à l'occasion d'une perturbation locale.

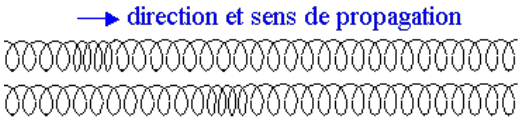
Une **onde** est la propagation d'un signal dans l'espace, **sans transport de matière**. Une onde ne transporte pas de matière mais de l'énergie (ou de l'information).

Exemples et types d'ondes, signaux associés :

- Onde à la surface de l'eau (onde mécanique)
  On jette une pierre dans l'eau, des cercles concentriques se forment et s'éloignent du point d'impact. Il est important de noter que ce déplacement **n'est pas un déplacement de matière** ! L'eau se déplace uniquement de haut en bas, ce que l'on voit s'il on regarde un objet flottant. On parle dans ce cas d'**onde transversale** car la perturbation (le signal) est perpendiculaire à la direction de propagation.

- Onde le long d'une corde de guitare, de piano (onde mécanique)
  Le signal transporté est le déplacement transversal de la corde lorsque le musicien joue.

- Onde mécanique dans un ressort
  Si on comprime quelques spires et qu'on les libère, elles reviennent à leur position d'équilibre en se détendant. Lors de cette détente, elles compriment les spires suivantes et ainsi de suite



  La direction et le sens de propagation sont les mêmes : on parle d'**onde longitudinale**.

- Onde acoustique
  Le phénomène ressemble à celui du ressort. Une source sonore émet toujours une vibration (mécanique) : le signal transporté est la surpression locale de l'ai par rapport à la pression atmosphérique (onde longitudinale).

- Onde électromagnétique (lumière, ondes radio, wifi, etc.)
  Le signal transporté est un champ électromagnétique, la direction des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant perpendiculaire à la direction de propagation (onde transversale).

DEFINITIONS

Dans les exemples précédents, il est important de bien faire la distinction entre la **direction de la perturbation** (correspondant au signal) et la **direction de propagation** de l'onde.

Onde longitudinale : onde dont la perturbation locale parallèle est à la direction de propagation de l'onde.

Onde transversale : onde dont la perturbation locale est perpendiculaire à la direction de propagation.

DEFINITION

Une onde est la propagation d'une perturbation dans un milieu **sans transport de matière**. Seule de l'**énergie** est transportée, à partir d'une source dans toutes les directions qui lui sont offertes.

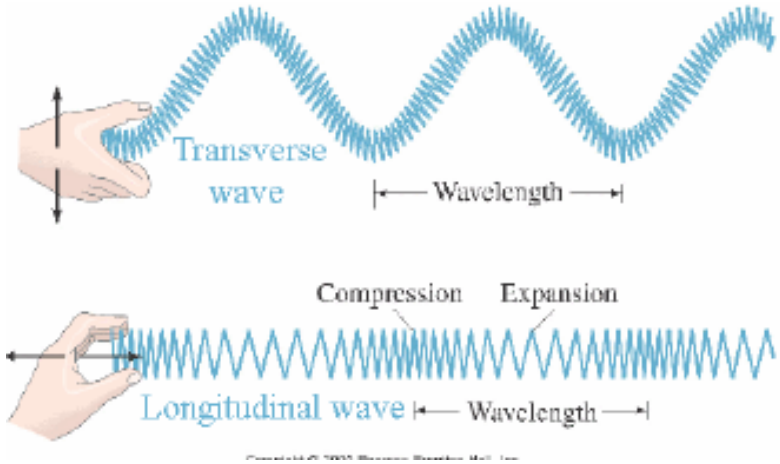
Certaines ondes comme les ondes mécaniques (les vagues formées par l'eau) ou acoustiques (qui sont des ondes de pression) ont besoin d'un **milieu matériel** pour se propager.

1.2. Ondes mécaniques, ondes sonores

Ondes mécaniques

Une onde mécanique est une onde pour laquelle le signal est une perturbation locale d'une propriété d'un **milieu matériel** (pression, densité, déformation). Elle ne peut donc pas exister sans milieu matériel, contrairement aux autres ondes qui sont les ondes électromagnétiques et les ondes gravitationnelles.

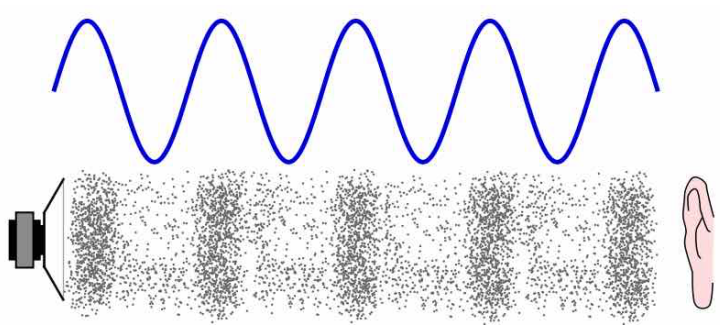
Ces ondes peuvent être longitudinales ou transversales :



Exemple : Dans le cas de la corde vibrante, la matière de la corde constitue le milieu de propagation, elle ne se déplace par dans son ensemble mais on observe des déformations locales qui elles se propagent. Un point donné va reproduire après un temps suffisamment long le mouvement d'un point précédent. Il est de plus nécessaire que le milieu puisse se déformer pour que l'on observe une propagation d'une onde mécanique, il doit posséder une certaine élasticité.

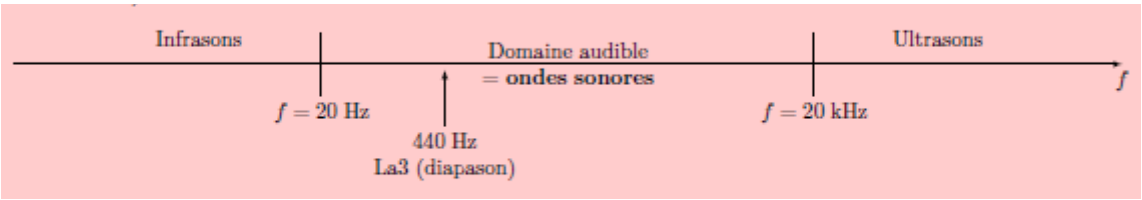
Ondes sonores

Les ondes sonores, ou acoustiques, sont un cas particulier d'ondes mécaniques non observables à notre échelle. Ces ondes sont provoquées par un émetteur qui est toujours un corps vibrant (vibration d'une corde vocale, de la membrane d'un haut-parleur, d'une corde de guitare, etc.). Cette perturbation locale se transmet de proche en proche dans l'air ou le milieu de propagation (surpression locale) et est ainsi transmise au récepteur (notre oreille, un microphone, etc.).



A RETENIR

Domaine des ondes acoustiques :



Une onde acoustique nécessite un milieu matériel pour se propager. Elle se propage d'autant plus vite que le milieu est dense :

- Dans l'air : $c \approx 340\ m\ \cdot s^{-1}$
- Dans l'eau : $c \approx 1500\ m\ \cdot s^{-1}$

1.3. Double périodicité : spatiale (λ) et temporelle (T)

Le signal transporté par une onde peut être représenté de deux points de vue :

- **Représentation spatiale** : on regarde à un instant t fixé la perturbation dans tout l'espace. Cela revient à prendre une photo de l'onde à un instant donné.
- **Représentation temporelle** : on regarde en une position x fixée la perturbation sur toute sa durée. Cela revient à placer un détecteur du signal en une position x fixée et réaliser l'enregistrement de la perturbation au cours du temps.

Nous nous limiterons aux ondes dont la propagation se fait selon une seule direction de l'espace (cas unidimensionnel) repérée par x. Le signal sera ainsi noté $s(x,t)$.

A RETENIR

Une onde est caractérisée par :

- Une période temporelle T (en s), à laquelle on associe une fréquence $\nu = 1/T$ (en Hz).
- Une période spatiale λ (en m, mais les unités les plus fréquentes sont le nm et le μm).

Les deux périodes sont liées par la célérité de l'onde :

$$\lambda = c \times T = \frac{c}{\nu}$$

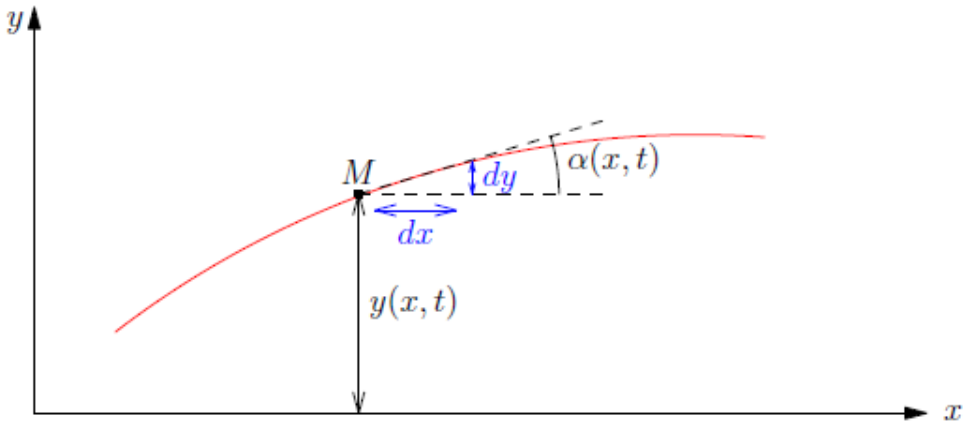
1.4. Équation de d'Alembert unidimensionnel : étude d'exemples

Les phénomènes ondulatoires sont généralement régis par une équation de propagation. Il en existe de nombreuses formes, dépendant du phénomène ondulatoire considéré et du milieu de propagation, mais un grand nombre obéissent à l'équation mathématique appelée **équation de d'Alembert**. Nous allons obtenir cette équation dans trois exemples particuliers.

Oscillation d'une corde vibrante

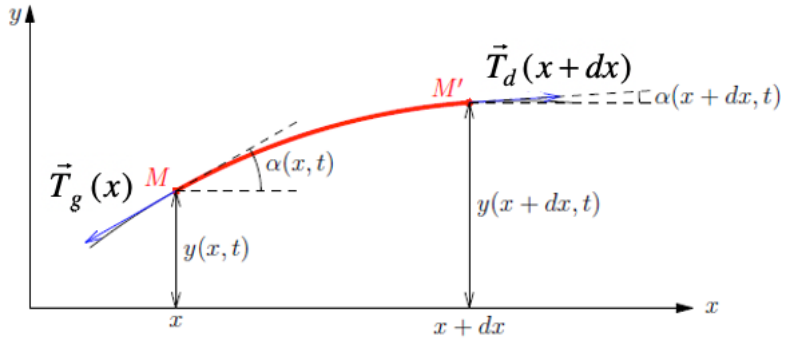
Nous considérons une corde vibrante, c'est-à-dire une corde tendue dont on s'intéresse aux petits mouvements verticaux en présence d'une perturbation. On considère que la corde a une masse linéique $\mu = m/L$, et qu'elle est initialement tendue avec une tension T_0. On considère que la force de pesanteur est négligeable devant cette tension.

On s'intéresse aux petits mouvement transversaux de la corde. On note alors $y(x,t)$ l'écartement de la corde au point d'abscisse x par rapport à sa position au repos, et $\alpha(x,t)$ l'angle de la corde par rapport à l'horizontale.



On se place dans le cas des petites perturbations. On peut donc faire les hypothèses suivantes :

- Le déplacement y est faible devant la longueur totale de la corde : $|y| \ll L$
- L'angle de déviation de la corde par rapport à l'horizontal est faible : $|\alpha| \ll L$
- On en déduit que $\partial y/\partial x = \tan\alpha \sim \sin\alpha \sim \alpha \ll 1$



Si on considère une coupure fictive au point d'abscisse x, l'action exercée par la partie gauche de la corde sur la partie droite se réduit à une force $\overrightarrow{T_g}(x)$ tangente à la corde ; de même, l'action exercée par la partie droite sur la partie gauche se réduit à une force $\overrightarrow{T_d}(x)$.

D'après le principe des actions réciproques, $\overrightarrow{T_d}(x) = -\overrightarrow{T_g}(x)$.

On considère maintenant le tronçon infinitésimal de corde situé entre M et M', de masse $dm = \mu dx$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à ce tronçon on obtient :

$$dm\vec{a}(M) = \overrightarrow{T_g}(x,t) + \overrightarrow{T_d}(x+dx,t) = -\overrightarrow{T_d}(x,t) + \overrightarrow{T_d}(x+dx,t)$$

Sachant que le mouvement est vertical (perturbation), en projetant sur les axes de la base cartésienne et en notant $T = \left\|\overrightarrow{T_d}\right\|$ on obtient :

$$\begin{cases} 0 = -T(x,t)\cos\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t) \\ dm\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x,t)\sin\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\sin\alpha(x+dx,t) \end{cases}$$

Dans l'hypothèse des petits angles et en se limitant à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} T(x+dx,t) = T(x,t) = cste = T_0 \\ \mu dx\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x,t)\,\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\,\alpha(x+dx,t) = T_0\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}dx = T_0\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \end{cases}$$

On obtient alors l'équation de propagation des ondes transversales sur une corde :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Cette équation est l'équation de d'Alembert à une dimension dont la forme générale s'écrit :

ÉQUATION DE D'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

où c est la célérité de l'onde.

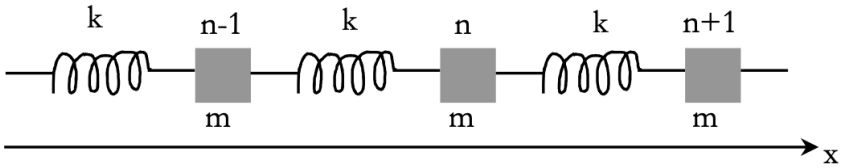
Ici la célérité dépend des caractéristiques de la corde et de la tension appliquée :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

La résolution de l'équation de d'Alembert sera traitée dans le paragraphe suivant.

Chaîne d'oscillateurs

Afin d'étudier la propagation d'ondes sonores dans les solides, on utilise le modèle suivant (voir figure) : le solide est constitué d'une chaîne infinie d'atomes ponctuels, de masse m, reliés entre eux par des ressorts de raideur k et de longueur à vide $l_0 = a$ (correspondant à la distance inter-atome à l'équilibre).



Le mouvement de l'ensemble se fait sans frottements le long de l'axe (Ox). Les atomes se déplacent légèrement autour de leurs positions d'équilibres respectives, que l'on peut repérer sous la forme $x_{éq,n} = na$.

On repère les positions des atomes hors équilibre par leurs abscisses :

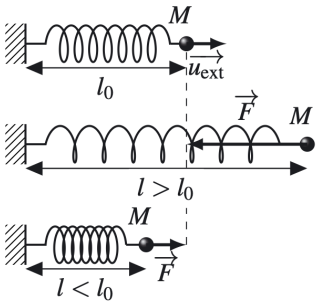
$$x_n(t) = nl_0 + u_n(t) = na + u_n(t)$$

où les déplacements $u_n(t)$ restent faibles vis-à-vis de a.

Rappel :

La force de rappel élastique vaut $\vec{F} = -k\Delta l\overrightarrow{u_{ext}}$ où :

- $\overrightarrow{u_{ext}}$ est un vecteur unitaire parallèle au ressort, orienté vers l'extérieur du ressort.
- $\Delta l = l - l_0$ est l'allongement du ressort en notant respectivement l et l_0 la longueur du ressort et sa longueur à vide.
- k est la raideur du ressort en $N.m^{-1}$.



Pour appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'atome de rang n, il suffit d'écrire la somme des forces de rappel élastique exercées par ses deux voisins ($n-1$ et $n+1$) :

$$m\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{f_{n-1}(t)} + \overrightarrow{f_{n+1}(t)}$$

Le ressort de gauche hors équilibre a gagné u_n et perdu u_{n-1} par rapport à sa longueur à vide $l_0 = a$. La force $\overrightarrow{f_{n-1}}$ pousse l'atome de rang n vers la droite.

Le ressort de droite hors équilibre a gagné u_{n+1} et perdu u_n par rapport à sa longueur à vide $l_0 = a$. La force $\overrightarrow{f_{n+1}}$ pousse l'atome de rang n vers la gauche.

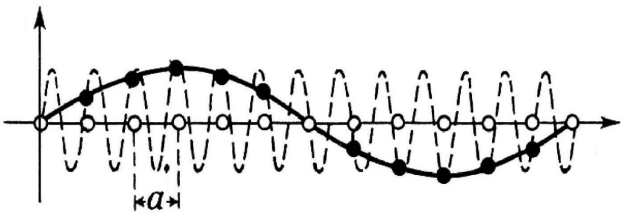
$$m\ddot{x}_n\overrightarrow{u_x} = -k[(a + u_n(t) - u_{n-1}(t)) - a](\overrightarrow{u_x}) - k[(a + u_{n+1}(t) - u_n(t)) - a)](-\overrightarrow{u_x})$$

En projection sur l'axe Ox on obtient :

$$m\ddot{x}_n = -k(u_n(t) - u_{n-1}(t)) + k(u_{n+1}(t) - u_n(t)) = -k(2u_n(t) - u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t))$$

La distance a inter-atome est de l'ordre de $a = 10^{-10}\ m$, distance très inférieure aux distances caractéristiques des phénomènes de propagation que l'on étudie.

En blanc, les atomes à l'équilibre, en noir les atomes hors équilibre.



On peut définir une <u>fonction continue</u> :

$$u(x_n, t) = u_n(t)$$

La distance a entre les atomes est très petite devant la longueur d'onde λ ($a \ll \lambda$) : c'est l'**approximation des milieux continus.**

Il vient alors (développement de Taylor-Young <u>au second ordre</u>) :

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = u(x_{n+1}, t) = u(x_n + a, t) = u(x_n, t) + a\dfrac{\partial u(x_n,t)}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial x^2} \\ u_{n-1}(t) = u(x_{n-1}, t) = u(x_n - a, t) = u(x_n, t) - a\dfrac{\partial u(x_n,t)}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial x^2} \end{cases}$$

Et l'équation du mouvement devient :

$$m\frac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial t^2} = ka^2\frac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial x^2}$$

On reconnaît à nouveau l'équation d'onde de d'Alembert avec :

$$\frac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x_n,t)}{\partial t^2} = 0$$

où

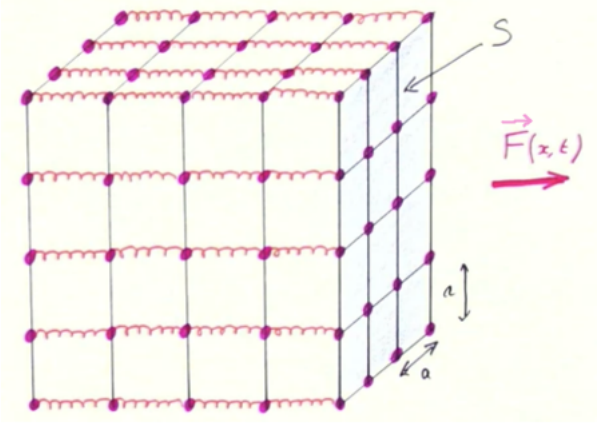
$$c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}$$

Lien avec le module de Young

Loi de Hooke :

$$\frac{F}{S} = E \times \frac{\Delta L}{L}$$

où E est appelé **module de Young**, caractérisant la rigidité du solide.



On considère un modèle de solide tridimensionnel constitué de chaînes d'atomes associées en parallèle de telle sorte qu'à l'équilibre les atomes soient situés aux sommets d'un réseau cubique de pas a et d'axe (Ox), (Oy) et (Oz). Dans un tel réseau, chaque cube de côté a contient 8 atomes placés sur ses 8 sommets, chaque atome étant commun aux 8 cubes qui se touchent en ce point.

La force exercée par l'atome de rang $n+1$ sur l'atome de rang n est :

$$f_{n+1}(t) = k(u_{n+1}(t) - u_n(t))$$

Dans le cadre de l'approximation des milieux continus, cette force est également une fonction continue et peut s'écrire :

$$f(x,t) = k\big(u(x+a,t) - u(x,t)\big) = ka\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Le nombre d'atomes sur une section transverse S de solide est S/a^2.

La force exercée par la partie de droite de la surface sur la partie de gauche vaut :

$$F(x,t) = \frac{S}{a^2} f(x,t)$$

$$\frac{F(x,t)}{S} = \frac{k}{a}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

On démontre ainsi la loi de Hooke, avec le module de Young égal à :

$$E = \frac{k}{a}$$

On remarque que E est homogène à une force par une surface, soit une pression. La vitesse de propagation du son dans le solide peut s'exprimer en fonction de E :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

Son dans un fluide

Nous allons appliquer le cas précédent à la propagation du son dans un milieu continu, fluide (le cas de la propagation dans les solides se ramène à l'étude précédente). Dans un milieu fluide, la loi de Hooke ne s'applique plus : les forces à prendre en compte sont alors les forces pressantes au sein du fluide : nous avons vu que l'onde acoustique consiste en la propagation d'une surpression.

Le fluide est décrit par les champs de pression, de masse volumique et de vitesse, notés P_0, ρ_0 et $\vec{0}$, car le fluide est immobile au repos. Lorsqu'une onde se propage, ces champs sont modifiés :

$$P(M,t) = P_0 + P_1(M,t)$$

$$\rho(M,t) = \rho_0 + \rho_1(M,t)$$

$$\vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t)$$

La grandeur $P_1(M,t)$ est appelé **surpression**, afin de ne pas la confondre avec la pression totale $P(M,t)$.

APPROXIMATION ACOUSTIQUE

Les grandeurs indicées par 1 décrivent l'onde sonore. Attendu que les ondes entendues par l'oreille humaine sont de très faible amplitude, les trois champs qui décrivent l'onde sont des infiniment petits d'ordre un.

L'approximation acoustique consiste à étudier des ondes de faible amplitude :

$$|P_1| \ll P_0, \qquad |\rho_1| \ll \rho_0, \qquad |v_1| \ll c, \qquad a \ll \lambda$$

et à mener les calculs au premier ordre, en négligeant l'influence de la pesanteur.

Ordre de grandeur de la surpression : Les surpressions susceptibles d'être détectées par une oreille varient typiquement de 100 Pa (son douloureux) à 10^{-5} Pa (seuil d'audition), couvrant ainsi 7 décades.

A RETENIR

On néglige les phénomènes dissipatifs comme la conduction thermique ou les phénomènes de viscosité ce qui revient à postuler le caractère isentropique de la propagation des ondes sonores.

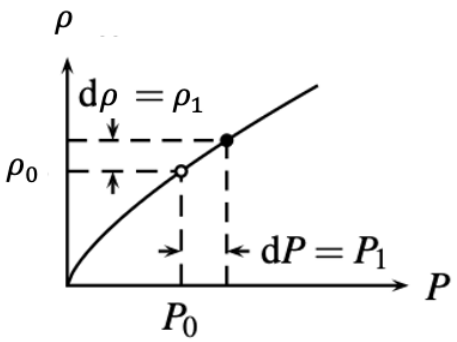
Dans le cadre de l'approximation acoustique, le coefficient de compressibilité isentropique donne :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$$

Quelle est sa valeur lors du passage d'une onde ?

La masse volumique du fluide ρ varie avec la pression P.

Lorsque la pression varie d'une petite valeur dP, qui représente la surpression P_1, ρ varie de $d\rho$, noté ρ_1.



Attendu la faiblesse des variations, on associe la dérivée au taux de variation.

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\rho_1}{P_1}$$

On obtient :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\frac{\rho_1}{P_1}$$

Avec $\rho = \rho_0 + \rho_1$ il vient :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho_0 + \rho_1}\frac{\rho_1}{P_1}$$

Et donc :

$$\chi_S \rho_0 P_1 + \chi_S \rho_1 P_1 = \rho_1$$

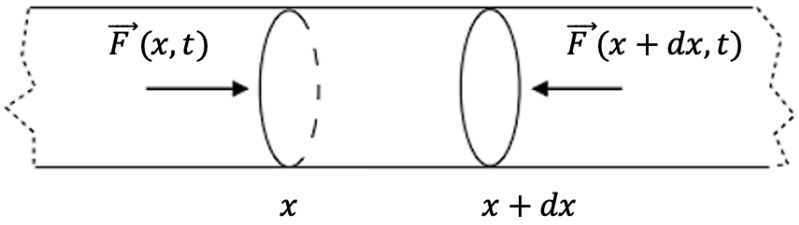
infiniment petit d'ordre : 1 2 1

Au premier ordre, on obtient :

$$\rho_1 = \rho_0 \chi_S P_1$$

Équation de propagation

Considérons un élément de volume de fluide d'épaisseur infinitésimale dx, délimité par deux faces d'aire S, situées en x et $x + dx$.



En projection, la somme des forces appliquées au système est la somme des forces de pression sur les deux faces :

$$F(x,t) - F(x+dx,t) = P(x,t)S - P(x+dx,t)S = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}Sdx$$

Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'élément de fluide contenu dans ce volume de masse $dm = \rho(x,t)Sdx$:

$$\rho(x,t)Sdx\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}Sdx$$

soit en simplifiant :

$$\rho(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$$

Dans le contexte de l'approximation acoustique on aboutit à :

$$\rho_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} \quad (1)$$

Pour faire le lien entre masse volumique et vitesse on applique la conservation de la masse pendant la durée dt.

La masse du système est :

$$m_{intérieur} = \rho V = \rho Sdx$$

sa variation pendant la durée dt est :

$$dm = \frac{\partial \rho Sdx}{\partial t}dt$$

Le bilan de flux au sein du volume étudié correspond à la différence entre la masse entrante et la masse sortante :

$$m_{entrante} - m_{sortante} = \rho(x,t)v(x,t)Sdt - \rho(x+dx,t)v(x+dx,t)Sdt$$

sa variation pendant la durée dt est :

$$dm = [\rho v]_x\, Sdt - [\rho v]_{x+dx}\, Sdt$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial [\rho v]}{\partial x}$$

Dans le contexte de l'approximation acoustique on aboutit à :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Or nous avons montré initialement que :

$$\rho_1 \approx \rho_0 \chi_S P_1$$

L'équation devient finalement :

$$\chi_S \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

Pour obtenir l'équation de propagation nous dérivons l'équation (1) par rapport à t et l'équation (2) par rapport à x :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t}$$

$$\chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

On identifie alors le terme $\partial^2 P_1 / \partial x \partial t$ dans les deux équations :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Ce qui permet d'aboutir à l'équation de d'Alembert pour la propagation du son dans un fluide

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

où :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

Solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

Nous recherchons les fonctions $\psi(x,t)$ solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

A VOUS DE JOUER

1. Vérifier qu'il existe deux familles de fonctions vérifiant l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$f(x,t) = f(x-ct)$$
$$g(x,t) = g(x+ct)$$

2. Montrer que pour la fonction f la propagation se fait dans le sens des x croissants.

3. Montrer que pour la fonction g la propagation se fait dans le sens des x décroissants.

4. Montrer que si les fonctions $\psi_1(x,t)$ et $\psi_2(x,t)$ sont solutions de l'équation de d'Alembert, alors la fonction $\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$ l'est aussi. Comment appelle-t-on cette propriété ?

A RETENIR

La solution générale de l'équation de d'Alembert est du type :

$$\psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

- Lorsque la solution est du type $f(x-ct)$ on parle d'**onde progressive** : l'énergie se propage dans le sens des x croissants.
- Lorsque la solution est du type $g(x+ct)$ il s'agit également d'une onde progressive, mais l'énergie se propage dans le sens des x décroissants (on parle parfois d'onde dégressive).

Nous verrons par la suite que la somme des deux termes peut donner des types d'ondes très différents des ondes progressives, notamment qui ne propagent pas d'énergie dans l'espace (ondes stationnaires).

2. Ondes progressives

2.1. Onde progressive sinusoïdale

Comme nous venons de le voir, une onde progressive est une perturbation qui se retrouve à l'identique un peu plus loin et un peu plus tard et qui transporte de l'énergie. Le cas le plus simple d'onde progressive est l'onde sinusoïdale ou **harmonique** dont l'expression est la suivante :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct + \Phi_0) = \psi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi c}{\lambda}t + \phi_0\right) = \psi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

On définit :

- Le **vecteur d'onde**, ou **pulsation spatiale** : $k = 2\pi/\lambda$
- La **pulsation temporelle** : $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$

L'expression d'une onde progressive harmonique (propagation vers les x croissants) est donc la suivante :

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

Remarque : Pour une onde sinusoïdale se propageant vers les x décroissants l'expression devient

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t + kx + \phi_0)$$

On remarque que l'expression mathématique fait bien apparaître la double périodicité, spatiale et temporelle, comme vu précédemment :

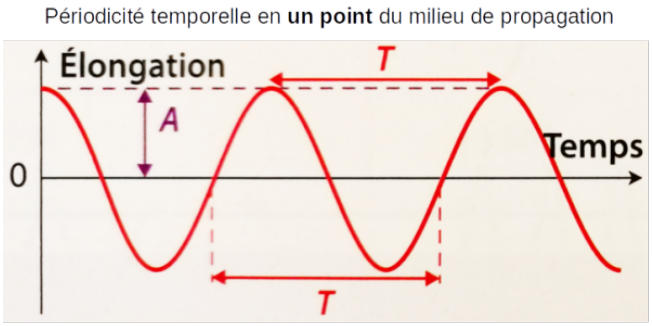
	Période	Pulsation	Relation période-pulsation
Spatiale	λ	k	$\lambda = \frac{2\pi}{k}$
Temporelle	T	ω	$T = \frac{2\pi}{\omega}$

Les deux périodes sont liées par la célérité de l'onde :

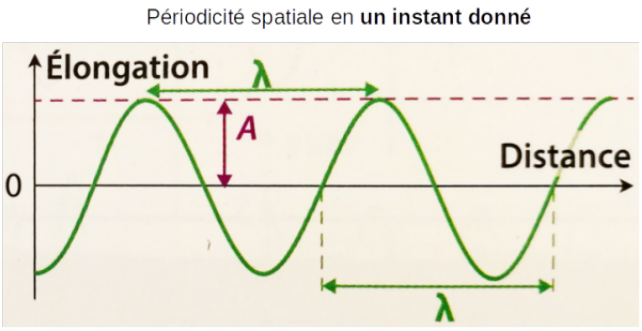
$$\lambda = c \times T = \frac{c}{\nu}$$

Représentations

- Visualisation en un point fixe aux cours du temps



- Visualisation dans l'espace à un instant donné



2.2. Approche énergétique

Densité d'énergie acoustique

L'énergie propagée par une onde acoustique comprend deux termes : l'énergie cinétique des particules en mouvement et l'énergie potentielle du fluide compressé (forces de pression). L'étude énergétique se fera pour une unité de volume : on parlera donc de **densité volumique d'énergie acoustique**.

- Energie cinétique volumique
  Dans le cadre de l'approximation acoustique on suppose $\rho = \rho_0$ soit :
  $$E_c = \frac{1}{2}\rho_0 v^2$$
- Energie de compression
  L'énergie potentielle acquise par le fluide lors d'une compression du volume de dV correspond, d'après le premier principe de la thermodynamique, au travail des forces de pression (positif si $dV < 0$) :
  $$dE_P = \delta W = -PdV$$

  La conservation de la masse pour l'élément de fluide considéré impose :
  $$\rho V = \rho_0 V_0$$
  Donc :
  $$dV = -\frac{\rho_0 V_0}{\rho^2} d\rho$$
  Nous avons également montré que pour une compression isentropique :
  $$\rho_1 = \rho_0 \chi_S P_1$$
  $$d\rho_1 = \rho_0 \chi_S dP_1$$
  $$d\rho = \rho_0 \chi_S dP$$
  Donc :
  $$dV = -\frac{\rho_0^2 \chi_S V_0}{\rho^2} dP$$

Par la même approximation que précédemment $\rho \approx \rho_0$:

$$dV = -\chi_S V_0 dP$$

Il vient donc que :

$$dE_p = \chi_S V_0 P dP$$

Pour l'unité de volume V_0 :

$$dE_p = \chi_S P dP$$

Qui s'intègre en :

$$E_p = \frac{1}{2}\chi_S P^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2\rho_0}P^2$$

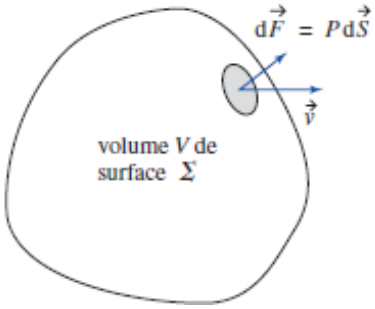
La densité volumique d'énergie acoustique est donc la somme des deux termes :

$$E_{ac} = \frac{1}{2}\frac{P^2}{\rho_0 c^2} + \frac{1}{2}\rho_0 v^2$$

Vecteur densité de puissance

Considérons un volume V de fluide délimité par une surface Σ fixe. Les forces de pression exercée par le fluide à l'intérieur du volume sur les particules sortant au niveau de l'élément de surface $d\vec{S}$ valent :

$$d\vec{F} = P d\vec{S} = (P_0 + P_1) d\vec{S}$$



Calculons la puissance de cette force :

$$\mathcal{P} = \iint_\Sigma d\vec{F}\cdot\vec{v} = \iint_\Sigma (P_0 + P_1) d\vec{S}\cdot\vec{v} = \iint_\Sigma P_0 d\vec{S}\cdot\vec{v} + \iint_\Sigma P_1 d\vec{S}\cdot\vec{v}$$

La valeur moyenne temporelle du premier terme est nulle car il n'y a pas de propagation de matière :

$$\iint_\Sigma P_0 d\vec{S}\cdot\vec{v} = P_0 \iint_\Sigma \vec{v}\cdot d\vec{S} = \vec{0}$$

On a donc :

$$\mathcal{P} = \iint_\Sigma P_1 \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

On en conclue que la puissance cédée par le volume V aux particules qui en sortent est égale au flux sortant du vecteur $\vec{\Pi} = P_1\vec{v}$.

DEFINITION

$\vec{\Pi} = P_1\vec{v}$ est le **vecteur densité de puissance** ou densité de courant d'énergie de l'onde sonore.
Il s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.

Intensité sonore

Prenons le cas d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants : f(x-ct).

L'intensité sonore de cette onde, notée I, est par définition la valeur de la puissance moyenne transférée par l'onde sonore à travers une surface unitaire perpendiculaire à sa direction de propagation. C'est donc également le flux moyen du vecteur $\vec{\Pi}$ à travers cette surface :

$$I = \langle P_1 v \rangle = \rho_0 c \langle v^2 \rangle = \rho_0 c \langle f^2(x - ct) \rangle$$

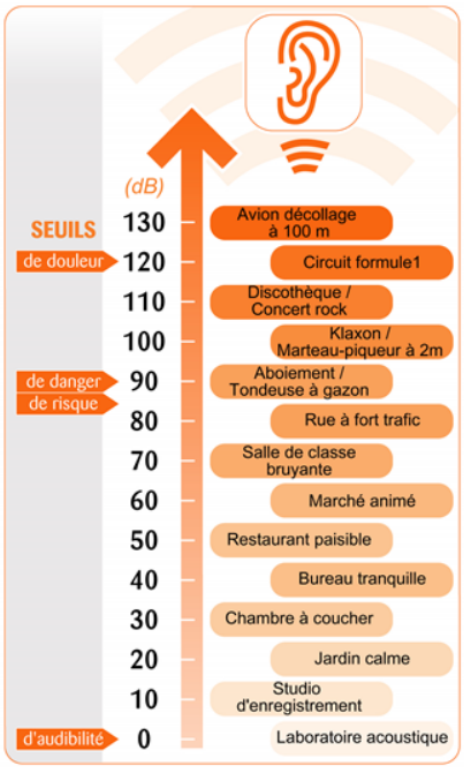
Le domaine de fréquences accessibles à une oreille humaine s'étend environ de 20 Hz à 20 kHz (voir plus haut). La gamme des intensités sonores accessibles est très large. Le seuil d'audition correspond à une intensité sonore (pour une oreille moyenne à environ 1 500 Hz) à $I = 10^{-12}\ W \cdot m^{-2}$; le seuil de douleur se situe à $I = 1\ W \cdot m^{-2}$.

Il est donc intéressant d'utiliser une échelle logarithmique pour repérer les intensités sonores. Le niveau sonore est défini en décibels par :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Avec $I_0 = 10^{-12}\ W \cdot m^{-2}$.

Ordres de grandeur



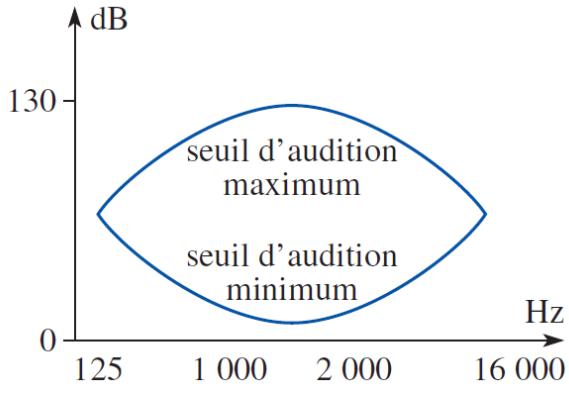
> 105 dB(A) : Risques immédiats/ court terme pour l'audition : surdité, acouphènes...

85-105 dB(A) : Risques à moyen/long terme pour l'audition si exposition chronique : pertes auditives

A partir de 40 dB(A) la nuit et de 55 dB(A) le jour : effets extra-auditifs du bruit (fatigue, stress, troubles du sommeil, troubles de l'humeur, troubles cardio-vasculaires, troubles des apprentissages, gêne...)

Plusieurs facteurs entrent en considération : niveau sonore, fréquence, caractère continu ou intempestif du bruit, durée d'exposition, sensibilité individuelle...

Le seuil auditif de l'oreille dépend aussi de la fréquence, le niveau sonore maximum étant de 130 dB à 1 500 Hz environ :



2.3. Impédance acoustique

La notion d'**impédance acoustique** est une notion essentielle dans le domaine de l'ingénierie acoustique. Cette grandeur caractérise le comportement d'un matériau lorsqu'il est traversé par une onde acoustique ; nous en donnerons une définition plus précise par la suite, mais nous pouvons la voir comme une « résistance » à la propagation du son, qui dépend des fréquences, de manière analogue à l'impédance en électricité (filtres) : certains matériaux laissent passer certaines fréquences (graves ou aigues) et pas d'autres. Cette notion a donc des applications pratiques très importantes :

- Conception de salles et studios acoustiques : salles de concert, studios d'enregistrement, salles de cinéma. En comprenant comment les matériaux des murs, du sol et du plafond influencent l'impédance acoustique, on peut créer des environnements qui offrent une réverbération et une qualité sonore optimales.
- Isolation phonique, dans le domaine de la construction, dans les automobiles, etc.
- Électronique et télécommunications : adaptation d'impédance entre transducteurs acoustiques (hauts parleurs, microphones) et le milieu environnant est cruciale pour maximiser l'efficacité de la conversion entre signaux électriques et acoustiques.
- Ultrasons et imagerie médicale : En médecine, l'impédance acoustique est utilisée dans les technologies d'imagerie par ultrasons. Lorsque les ondes ultrasonores rencontrent différents types de tissus corporels, les variations d'impédance acoustique génèrent des échos qui sont utilisés pour créer des images internes du corps.

L'impédance acoustique est analogue à l'impédance dans les circuits électriques : dans le cas de l'électricité il y a une « cause » la tension qui provoque un « effet » le passage du courant. L'intensité de ce courant sera d'autant plus forte que l'impédance est faible. La loi d'Ohm (aux bornes d'une résistance) en est une illustration simple, mais on sait que pour d'autres composants ou circuits, cette impédance dépend de la fréquence du signal : le courant généré varie selon la fréquence. On dit que la tension u et l'intensité i sont des **variables couplées**, car liées par une relation mathématique.

En acoustique, la « cause » est la surpression P_1 et l'effet la vitesse de déplacement v des entités microscopiques constituant le milieu. P_1 et v sont donc également des variables couplées, liées par l'impédance.

Ces deux grandeurs obéissent à l'équation de d'Alembert, et dans le cas des ondes progressives harmoniques on peut les écrire de la manière suivante, en fixant arbitrairement la phase initiale de la surpression à 0 :

$$P_1 = P_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$v = v_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Pour linéariser les équations nous allons, comme en électricité, utiliser des notations complexes :

$$\underline{P_1} = P_0 e^{j\omega t} e^{-jkx}$$

$$\underline{v} = v_0 e^{j\omega t} e^{-jkx} e^{-j\phi}$$

DEFINITION

L'impédance acoustique complexe est définie par le rapport :

$$\underline{Z_{ac}} = \frac{P_1}{\underline{v}}$$

Plus haut, nous avons montré que les lois de la dynamique donnent la relation suivante :

$$\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x}$$

Avec la notation complexe, cela donne :

$$j\omega\rho_0\underline{v} = jk\underline{P_1}$$

Soit :

$$\underline{Z_{ac}} = \frac{j\omega\rho_0}{jk} = \frac{\omega\rho_0}{k}$$

Avec :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c \times T} = \frac{\omega}{c}$$

L'impédance acoustique est donc une grandeur réelle et vaut dans un milieu donné :

$$Z_{ac} = \rho_0 c$$

ATTENTION

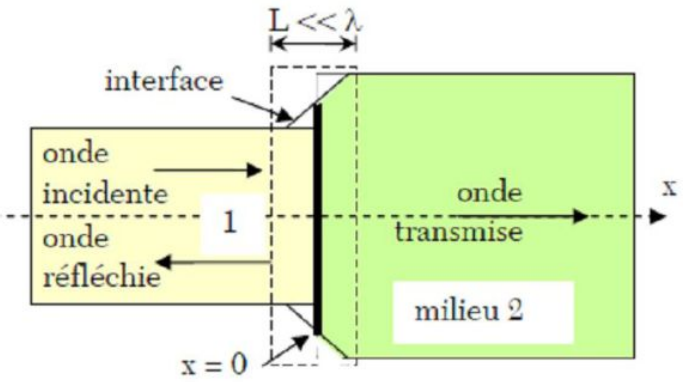
Cette relation est valable uniquement pour une onde progressive se propageant **dans le sens des x positifs** !

Lorsque la propagation a lieu dans le sens des x négatifs, on peut facilement montrer que :

$$Z_{ac} = -\rho_0 c$$

2.4. Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux

À une interface entre deux milieux d'impédances différentes, une partie de l'énergie seulement est transmise, l'autre partie est réfléchie. Il s'agit d'une situation semblable (généralisation) au cas d'une onde électromagnétique sur un dioptre entre deux milieux.



Les milieux (1) et (2) ont des caractéristiques physiques a priori différentes mais la pression à l'équilibre est identique, notée P_0. Les deux milieux matériels sont caractérisés par leurs impédances acoustiques :

$$Z_1 = \rho_1 c_1$$

$$Z_2 = \rho_2 c_2$$

Dans le milieu 1 les vitesses et pressions à l'interface (x=0) s'écrivent :

$$v_1 = f_1(-ct) + g_1\,(ct)$$

$$P_1 = Z_1 v_1$$

$f_1(-ct)$ correspond à l'onde incidente et $g_1\,(ct)$ correspond à l'onde réfléchie.

Dans le milieu 2, seule l'onde transmise est à prendre en compte :

$$v_2 = f_2(-ct)$$

$$P_2 = Z_2 v_2$$

DEFINITIONS

- Le coefficient de réflexion au niveau d'une interface est défini par :

$$R = \frac{g_1(ct)}{f_1(-ct)}$$

- Le coefficient de transmission au niveau d'une interface est défini par :

$$T = \frac{f_2(-ct)}{f_1(-ct)}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission dépendent des impédances des deux milieux. Écrivons la continuité de la pression et de la vitesse au niveau de l'interface :

$$v_1 = v_2$$

$$P_1 = P_2$$

Soit :

$$\begin{cases} f_1(-ct) + g_1\,(ct) = f_2(-ct) \\ Z_1 f_1(-ct) - Z_1 g_1\,(ct) = Z_2 f_2(ct) \end{cases}$$

Il suffit ensuite de tout diviser par $f_1(-ct)$ pour obtenir les coefficients de réflexion et de transmission :

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ Z_1 - Z_1 R = Z_2 T \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

On remarque que :

- T est réel et toujours positif : cela signifie que l'onde transmise est **en phase** avec l'onde incidente.
- R peut être négatif : dans ce cas l'onde réfléchie est en **opposition de phase** avec l'onde incidente.

REMARQUE

Il est également possible de définir les coefficients de transmission et de réflexion en puissance. Cela sera vu en TD.

2.5. Quelques applications

Adaptation d'impédance

Un cas particulier des équations précédentes est intéressant : lorsque $Z_1 = Z_2$ on remarque que le coefficient de réflexion est nul. Par conséquent, **il n'y a aucune réflexion du signal, l'onde incidente est intégralement transmise**. Cela est particulièrement évident lorsque l'onde se propage dans un même milieu. Mais lorsque l'on veut transmettre une onde sonore à travers plusieurs milieux, il est intéressant de faire en sortes que les impédances soient les plus proches possibles pour éviter les pertes par réflexion : cela s'appelle l'**adaptation d'impédance**. Cette technique consiste à ajuster les propriétés d'une interface entre deux milieux afin de minimiser la réflexion des ondes sonores à cette interface. L'objectif est de permettre à autant d'énergie sonore que possible de passer d'un milieu à l'autre, minimisant ainsi les pertes d'énergie et les réflexions indésirables.

Voici quelques exemples d'adaptation de l'impédance dans le domaine de l'acoustique :

- Il est possible d'intercaler un autre milieu entre deux milieux acoustiques différents afin d'obtenir une adaptation progressive de l'impédance : plutôt que de brusquement passer d'une impédance à une autre, ce qui peut entraîner des réflexions importantes, l'adaptation progressive implique la création d'une transition en douceur entre les deux impédances.

Ce principe est utilisé en échographie : des ultrasons sont émis à travers la peau puis les échos de ces ondes sonores sont captés pour créer des images en temps réel des structures internes du corps. Cependant, il y a une importante différence d'impédance acoustique entre l'air et la peau. Si les ondes sonores passaient directement de l'air à la peau, une grande partie de l'énergie serait réfléchie, ce qui rendrait l'imagerie inefficace. On utilise donc un gel, dont l'impédance acoustique est plus proche de celle des tissus corporels que l'air. Lorsqu'il est appliqué sur la peau, il crée une interface plus douce entre la sonde émettrice/réceptrice et la peau du patient. Cela permet aux ondes sonores de se propager plus efficacement sans subir de réflexions importantes, ce qui améliore la qualité des images.

- La forme de la structure de transmission joue également un rôle important.
  Par exemple, la forme d'un pavillon acoustique est telle que la section augmente progressivement en passant de la source sonore à l'air. Pour définir l'impédance acoustique dans une conduite de section variable, il est nécessaire d'appliquer la conservation du débit $S \times v$ et non de la vitesse v. L'impédance acoustique d'une conduite a ainsi pour expression :

$$Z = \frac{P_1}{Sv} = \frac{\rho c}{S}$$

  On voit donc qu'à mesure que la section augmente l'impédance acoustique diminue progressivement.

Cas où $Z_2 \gg Z_1$

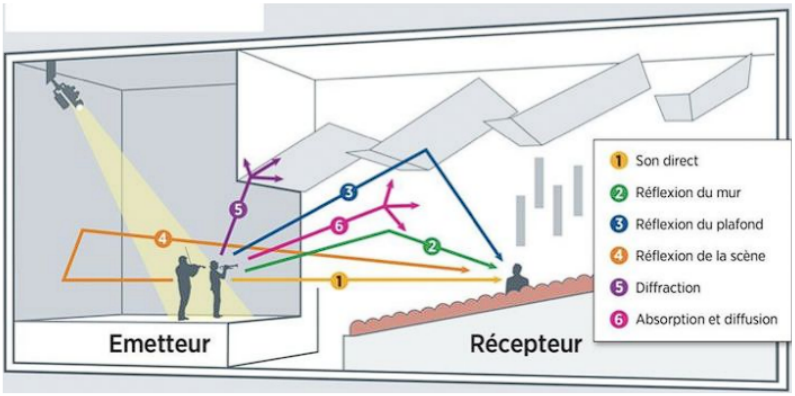
C'est le cas lorsque le son passe d'un milieu peu dense (l'air par exemple) à un milieu très dense (une cloison, un mur, etc.). Dans ce cas :

$$R \approx -1$$

$$T \approx 0$$

Le son est intégralement réfléchi (en opposition de phase) et la transmission est nulle. Cela est donc très utile pour l'isolation phonique : plus le matériau utilisé est dense, plus l'isolation sera efficace.

Par conséquent, les matériaux à haute impédance acoustique sont souvent utilisés dans des applications où il est souhaitable de réduire la quantité de son qui est transmise à travers un espace donné. Par exemple, l'isolation acoustique est généralement réalisée à partir de matériaux à haute impédance acoustique afin de réduire la quantité de bruit transmise à travers les murs et les plafonds des bâtiments. Inversement, les matériaux à faible impédance acoustique sont souvent utilisés dans des applications où il est souhaitable d'augmenter la quantité de bruit transmise à travers un espace donné.

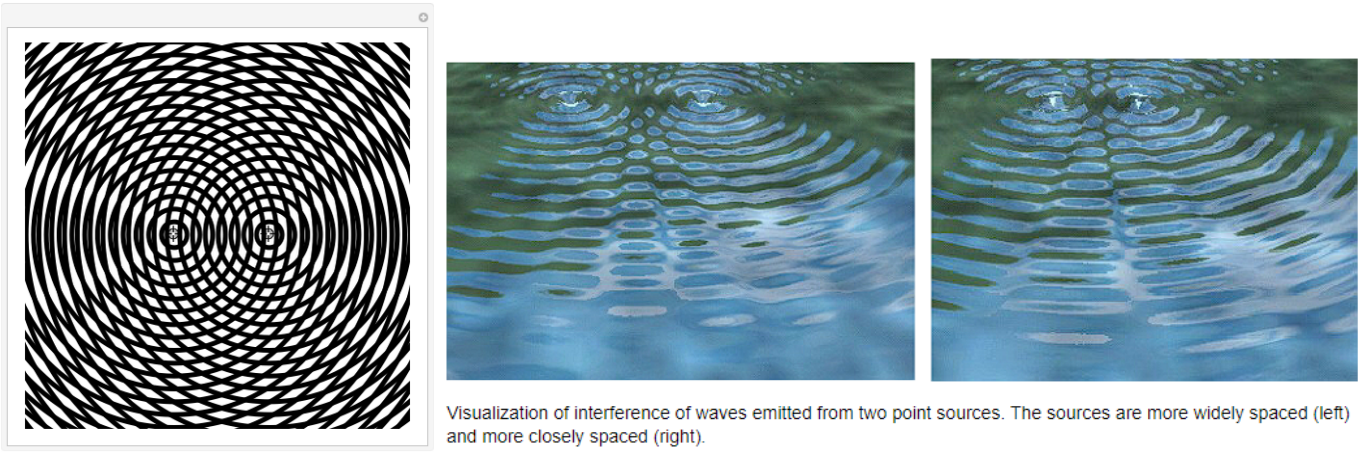


- Mur tapissé de mousse ou de feutre.
- Maximum d'énergie sonore absorbée par le mur.

2.6. Interférences entre deux ondes mécaniques de même fréquence

Les phénomènes d'interférences peuvent intervenir lorsqu'on superpose plusieurs ondes progressives harmoniques (en utilisant par exemple deux sources de même fréquence).

Ce phénomène s'observe par exemple avec des vaguelettes en surface de l'eau créées par des vibreurs de **même fréquence**, et **en phase**, et de **même amplitude**.



Visualization of interference of waves emitted from two point sources. The sources are more widely spaced (left) and more closely spaced (right).

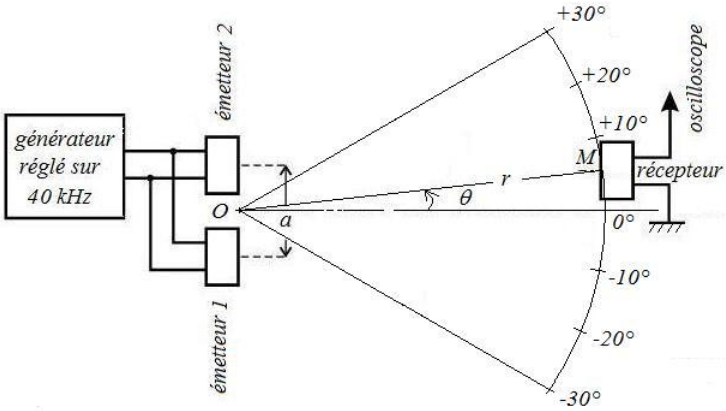
On observe la formation de creux et de bosses à distance des deux sources, selon l'angle d'observation. En effet, l'onde résultant des deux ondes émises par les sources à une amplitude quasi-nulle à certains endroits, et maximale à d'autres endroits. C'est le phénomène d'interférences.

DEFINITION

Deux ondes de même nature, synchrones (même phase) et de même fréquence qui se superposent en un point M donnent naissance au phénomène d'interférences en M.

L'amplitude de l'onde résultante de la superposition de plusieurs ondes est différente de la somme des amplitudes individuelles.

Pour expliquer le phénomène, nous allons étudier un dispositif dans lequel deux émetteurs synchrones sont utilisés, séparés d'une distance de a et un récepteur en M que l'on peut déplacer selon un angle θ par rapport à la médiatrice entre les deux émetteurs.



Repérage angulaire de M

Les deux sources étant synchrones et de même fréquence, les signaux reçus au point M en provenance des émetteurs E_1 et E_2 s'écrivent :

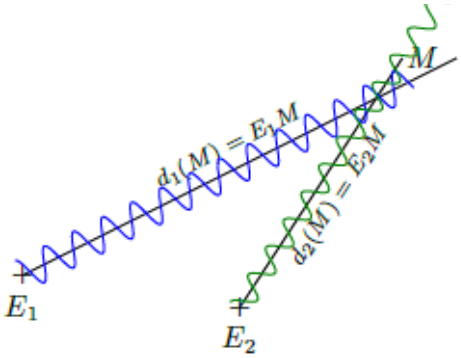
$$\psi_1(M,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kE_1M)$$

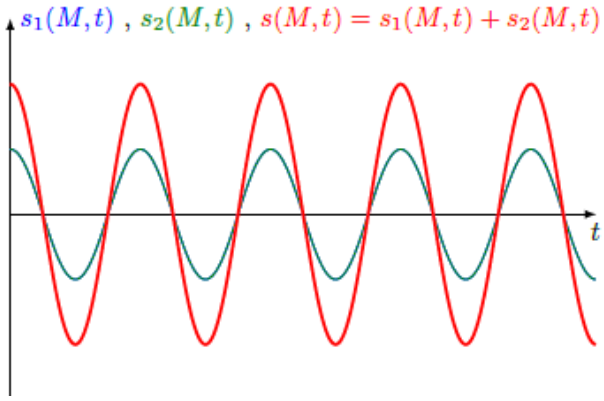
$$\psi_2(M,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kE_2M)$$

Ces deux signaux vont se superposer au point M :

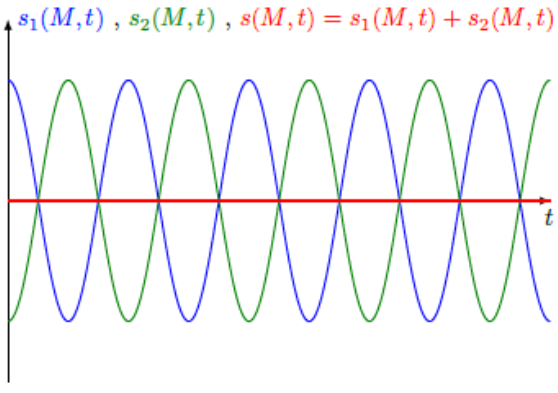
$$\psi(M,t) = \psi_1(M,t) + \psi_2(M,t)$$

- Si ces signaux sont en phase on observera en M un **maximum d'amplitude**. On parle d'**interférences constructives**.
- Si ces signaux sont en opposition de phase on observera une **amplitude quasi-nulle**. On parle d'**interférences destructives**.





Interférences constructives
Les signaux s'ajoutent car ils sont en phase



Interférences destructives
Les signaux s'annulent car ils sont en opposition de phase

Le déphasage entre les deux ondes est dû à la position du point M et à la différence entre les longueurs E_1M et E_2M :

$$\Delta\phi = k(E_1M - E_2M) = \frac{2\pi}{\lambda}(E_1M - E_2M)$$

Pour étudier l'amplitude du signal en fonction de l'angle θ il est commode d'utiliser la notation complexe :

$$\underline{\psi}(M,t) = \psi_0 e^{j\omega t} e^{-jkE_1M} + \psi_0 e^{j\omega t} e^{-jkE_2M} = \psi_0 e^{j\omega t}\left(e^{-jkE_1M} + e^{-jkE_2M}\right)$$

L'intensité du signal est donnée par la relation :

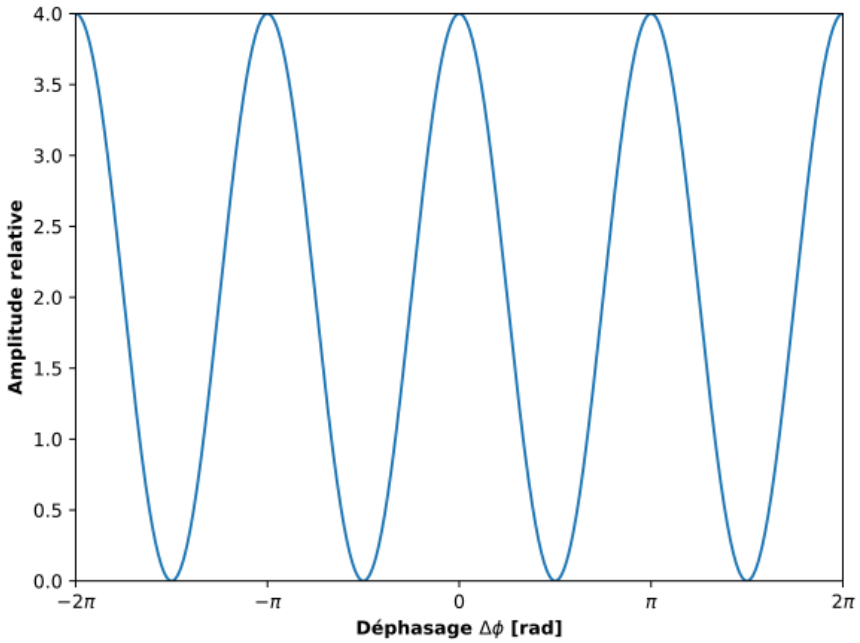
$$I(M,t) = \left|\underline{\psi}(M,t)\right|^2 = \psi_0^2\left|e^{-jkE_1M} + e^{-jkE_2M}\right|^2 = \psi_0^2\left(e^{-jkE_1M} + e^{-jkE_2M}\right)\left(e^{jkE_1M} + e^{jkE_2M}\right)$$

Qui donne :

$$I(M,t) = \psi_0^2(1 + 1 + e^{-j\Delta\phi} + e^{j\Delta\phi})$$

Soit finalement :

$$I(M,t) = 2\psi_0^2(1 + \cos\Delta\phi)$$



A RETENIR : CONDITIONS D'INTERFERENCES CONSTRUCTIVES OU DESTRUCTIVES

- Deux ondes interfèrent constructivement en M si leur déphasage est un multiple de 2π :

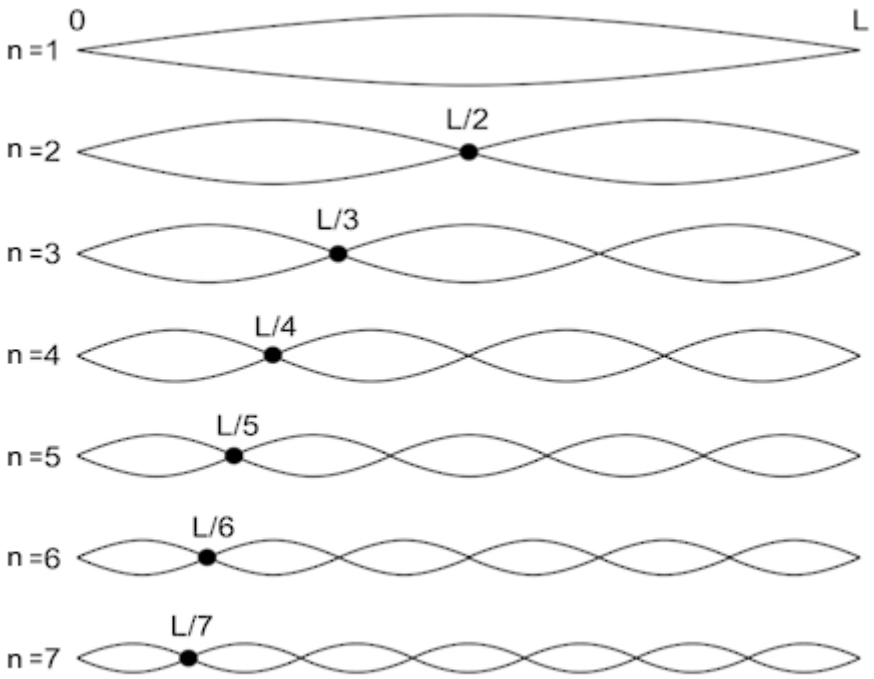
$$\Delta\phi = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Deux ondes interfèrent destructivement en M si leur déphasage est un multiple impair de π :

$$\Delta\phi = (2n+1)\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

3.1. Qu'est-ce qu'une onde stationnaire ? Exemple de la corde de guitare

Reprenons l'exemple de la corde vibrante, avec une modification : cette fois la corde est fixée à ses deux extrémités, comme c'est le cas par exemple pour une corde de guitare. On note L la longueur de la corde et on s'intéresse à la périodicité spatiale (on prend une photo de l'onde à un instant donné). Dans le cas d'une onde harmonique, la sinusoïde doit toujours avoir une valeur nulle aux deux extrémités. Dès lors on s'aperçoit que seules certaines longueurs d'ondes sont possibles :



On remarque donc que la longueur d'onde obéit à la loi suivante :

$$\lambda = \frac{2L}{n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

Qu'en est-il de la dépendance en fonction du temps ? La forme de l'onde reste inchangée, mais son amplitude varie en fonction du temps, ce que nous montrerons dans le paragraphe suivant. En définitive, ici l'onde ne se propage pas, contrairement aux ondes progressives : on parle d'**onde stationnaire**. Comme nous le venons de le voir avec la corde de guitare, les ondes stationnaires forment une famille discrète. Chaque onde correspondant à une valeur de n déterminée est appelée **mode propre**.

3.2. Résolution de l'équation de d'Alembert

Dans le paragraphe 1.1.4. nous avons établi l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

Où μ est la densité linéique de la corde, et T_0 sa tension.

Nous savons également que la solution générale de cette équation s'écrit :

$$y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Considérons une corde fixée à ses deux extrémités (en $x = 0$ et en $x = L$) le long de laquelle deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude se propagent en sens inverse :

- Une onde n°1 (onde incidente) se propageant selon les x croissants
- Une onde n°2 (onde réfléchie) se propageant selon les x décroissants, provenant de la réflexion de l'onde incidente en $x = L$.

On a donc :

$$y(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \phi_1) + A_0 \cos(\omega t + kx + \phi_2)$$

On rappelle la relation mathématique suivante :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)\cos(a-b)]$$

soit :

$$y(x,t) = 2A_0 \cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \psi)$$

Avec $\psi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$ et $\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$

Dans l'écriture ci-dessus, on constate que la dépendance temporelle (en t) et la dépendance spatiale (en x) n'apparaissent pas au sein de la même fonction cos/sin : on parle de séparation des variables x et t. Ceci est une caractéristique des signaux associés aux ondes stationnaires, qui les différencie des ondes progressives qui s'écrivent sous la forme $f(x \pm ct)$.

Notamment il existe des positions x pour lesquelles la fonction qui dépend de x uniquement est nulle, alors en ces positions, l'onde est toujours nulle. Tous les points de l'espace ne sont pas atteints par la même onde puisque certains ne vibrent jamais et d'autres si.

Les conditions aux limites sont les suivantes **à chaque instant** :

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

La première condition impose :

$$\psi = \pm\frac{\pi}{2}$$

Soit une solution du type :

$$y(x,t) = 2A_0 \cos(\omega t + \phi)\sin(kx)$$

La deuxième :

$$\sin kL = 0$$

Ce qui donne les modes propres indiqués précédemment :

$$\lambda = \frac{2L}{n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$$

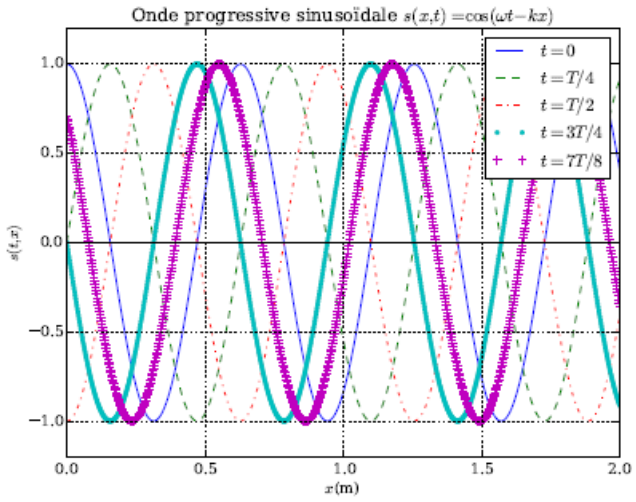
A RETENIR

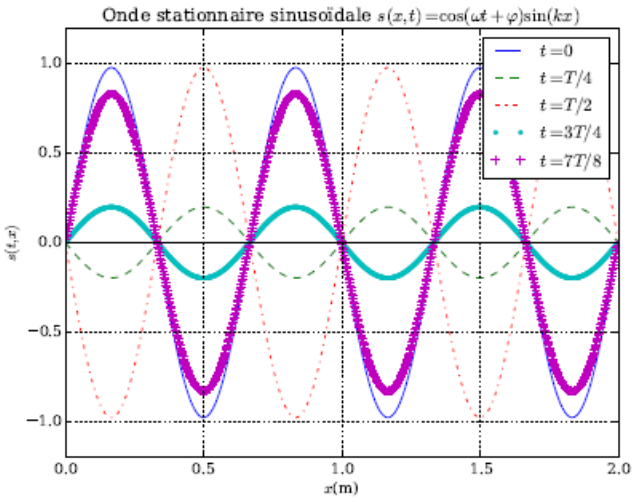
Les signaux associés aux ondes stationnaires s'écrivent sous la forme d'un produit d'une fonction de la position et d'une fonction du temps :

$$s(x,t) = f(x) \times g(t)$$

Les signaux associés aux ondes stationnaires **harmoniques** (sinusoïdales) s'écrivent sous la forme

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \psi)$$





3.3. Superposition d'ondes stationnaires. Analyse spectrale

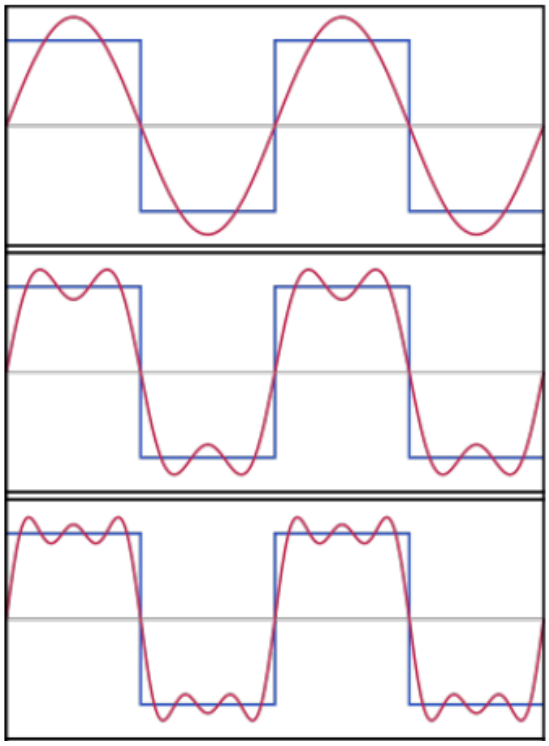
Nous avons déjà rencontré la notion d'analyse spectrale dans le cours d'électrocinétique, en étudiant les filtres. Nous savons que tout signal périodique (carré, triangle, etc.) peut en réalité se ramener à la somme de signaux harmoniques de différentes amplitudes et dont les fréquences sont multiples d'une fréquence appelée **fondamentale**. Les autres fréquences sont appelées **harmoniques**.

A RETENIR

Tout signal périodique peut se décomposer en une somme infinie de signaux périodiques d'amplitudes différentes, et de pulsations multiples de la pulsation du signal.

Cette opération de décomposition est appelée analyse harmonique ou **analyse spectrale**.

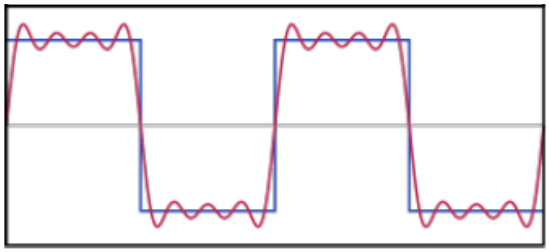
Prenons l'exemple du signal carré d'amplitude E :



1 sinus de même pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$

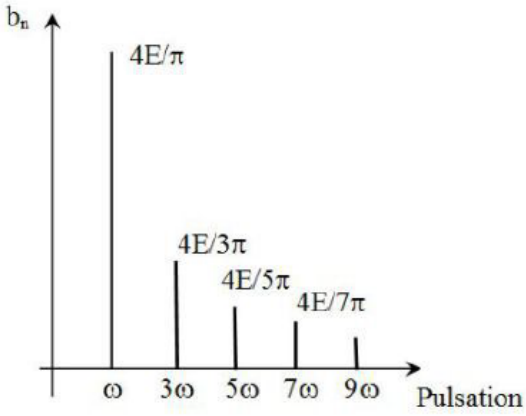
1 sinus de pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 3ω ; amplitude $\frac{4E}{3\pi}$

1 sinus de pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 3ω; amplitude $\frac{4E}{3\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 5ω; amplitude $\frac{4E}{5\pi}$



1 sinus de pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 3ω; amplitude $\frac{4E}{3\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 5ω; amplitude $\frac{4E}{5\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 7ω; amplitude $\frac{4E}{7\pi}$

L'analyse harmonique du signal carré se présente donc comme suit :

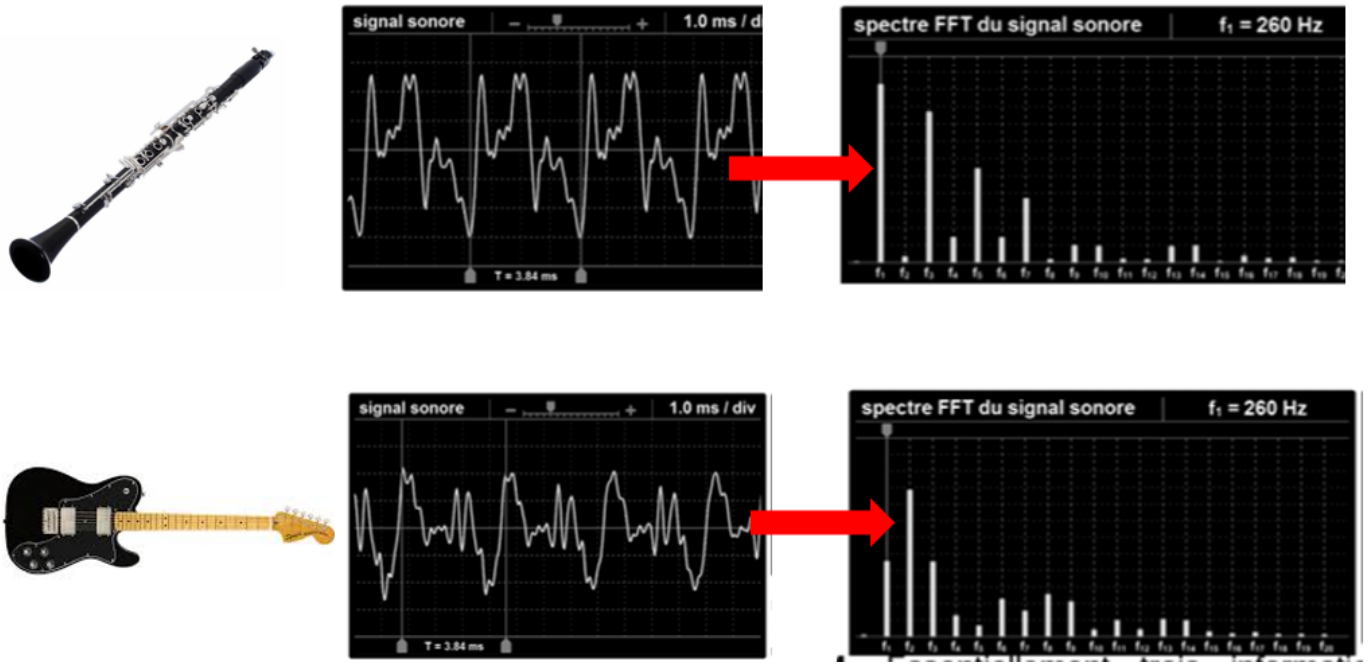


REMARQUE

L'opération mathématique qui consiste à réaliser la décomposition d'un signal périodique s'appelle décomposition en série de Fourier. Nous ne développerons pas les équations.

L'analyse spectrale est une opération pratique qui permet de visualiser cette décomposition. Le spectre obtenu est appelé **spectre de Fourier**.

L'analyse spectrale d'un instrument de musique, par exemple, permet d'étudier précisément son timbre, pour ensuite éventuellement utiliser des filtres (égaliseurs) permettant d'optimiser leur rendu sur un enregistrement :



4. Dispersion et absorption

Les calculs effectués dans la partie 1, menant à l'équation de d'Alembert à partir de différents exemples, sont en réalité des cas simplifiés. D'une part nous avons admis que la célérité des ondes sonores est une constante pour un milieu donné (à température et pression de repos définis) ; en particulier, nous avons supposé que la célérité est indépendante de la fréquence de la vibration transportée. Or, dans de nombreux milieux dits **dispersifs**, cela n'est pas le cas.

Remarque : on peut ici faire le parallèle avec la dispersion lumineuse vue en cours d'optique. Le matériau constituant un prisme par exemple, a un indice de réfraction dépendant de la fréquence, ce qui conduit à une séparation spatiale des rayonnements de différentes longueurs d'ondes.

Par ailleurs nous avons également négligé les effets de **dissipation d'énergie**, notamment en raison des frottements (qui se manifestent par la viscosité dans les fluides). Là encore, l'expérience montre que la dispersion s'accompagne d'une absorption importante des ondes sonores au cours de leur propagation, en raison de cette dissipation d'énergie.

4.1. Distinction dispersion / absorption

DEFINITIONS

- L'**absorption** d'une onde acoustique (plus généralement mécanique) se produit lorsque l'énergie transportée est convertie en énergie thermique en raison de phénomènes dissipatifs lorsqu'elle traverse un milieu. L'amplitude diminue alors progressivement à mesure qu'elle se propage dans ce milieu. Pour une onde harmonique, l'atténuation est exponentielle, sur une distance caractéristique δ qui dépend de la fréquence de l'onde. Plus le milieu est absorbant plus δ est petit.

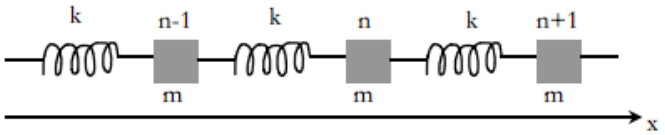
- La **dispersion** d'une onde acoustique (plus généralement mécanique) est le fait que la vitesse de propagation des ondes harmoniques (à savoir la vitesse de phase), dépend de leur fréquence. La dispersion ne peut donc pas se voir sur une seule onde harmonique, mais fait sentir ses effets dès que l'on a la superposition d'au moins deux ondes harmoniques de fréquences différentes.

Dans la plupart des cas, les deux phénomènes se produisent simultanément, mais il est important de bien les distinguer.

4.2. Relation de dispersion

La plupart du temps, un son qui se propage n'est pas pur (harmonique). Nous avons vu que le son d'un instrument, d'une voix, etc. est la somme de différentes ondes harmoniques que l'on superpose. On a donc à faire à un « paquet d'ondes », et ce quel que soit le nombre d'harmoniques que l'on superpose : deux, trois ou … une infinité.

Pour prendre en compte les phénomènes dissipatifs dans les équations, nous allons reprendre l'exemple de la chaîne d'atomes (ressorts couplés) étudié dans la première partie :



Rappel :

- Les ressorts ont une constante de raideur k, leur longueur à vide est a (distance interatomique).
- La position d'équilibre de l'atome n est : $x_{éq,n} = na$.
- Lorsque les atomes se déplacent on a : $x_n(t) = na + u_n(t)$, avec $u_n(t)$ petit devant a.

Pour appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'atome n, nous allons ajouter aux forces de rappel des ressorts une composante de frottement de la forme $-\alpha\,\partial u/\partial t$:

$$m\ddot{x}_n = -k(2u_n(t) - u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t)) - \alpha\frac{\partial u_n(t)}{\partial t}$$

Avec $u(x_n, t) = u_n(t)$ et un développement de Taylor-Young au second ordre, il vient :

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = u(x_{n+1}, t) = u(x_n + a, t) = u(x_n, t) + a\dfrac{\partial u(x_n, t)}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} \\ u_{n-1}(t) = u(x_{n-1}, t) = u(x_n - a, t) = u(x_n, t) - a\dfrac{\partial u(x_n, t)}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$m\frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial t^2} = ka^2\frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial u(x_n, t)}{\partial t}$$

L'équation de propagation est alors différente de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{ka^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}$$

La solution d'une telle équation peut être recherchée sous la forme d'une onde « pseudo-harmonique » c'est-à-dire une onde harmonique complexe :

$$\underline{u}(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - kx + \phi_0)}$$

En injectant cette solution générale dans l'équation de propagation on trouve l'équation liant k et ω, appelée **relation de dispersion** :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{ka^2}j\omega = 0$$

Interprétation :

- Si le milieu était sans pertes ($\alpha = 0$), la relation serait simplement :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad \text{soit :} \qquad k = \pm\frac{\omega}{c}$$

  k serait réel, l'onde ne subirait pas d'atténuation, elle se propagerait indéfiniment.
- Avec les pertes ($\alpha \neq 0$), on a un terme en $j\omega$.
- Cela implique que la solution de k ne peut plus être un nombre purement réel, donc on écrit :

$$\underline{k}(\omega) = k_1(\omega) + jk_2(\omega)$$

Sens physique :

- k_1 : partie réelle qui correspond à la **propagation**.
- k_2 : partie imaginaire qui correspond à l'**atténuation** ($k_2 < 0$: exponentielle décroissante de l'amplitude au fur et à mesure que l'onde se propage).

On injecte $\underline{k} = k_1 + jk_2$ dans l'expression $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - kx + \phi_0)}$:

$$-jkx = -j(k_1 + jk_2)x = -jk_1x + k_2x$$

$$\underline{u}(x, t) = u_0 e^{j\omega t} e^{-jk_1x} e^{k_2x} e^{j\phi_0}$$

La solution de l'équation est la partie réelle de $\underline{u}(x,t)$ soit :

$$u(x,t) = u_0 e^{k_2 x} Re(e^{j(\omega t - k_1 x + \phi_0)})$$

Rappel : $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

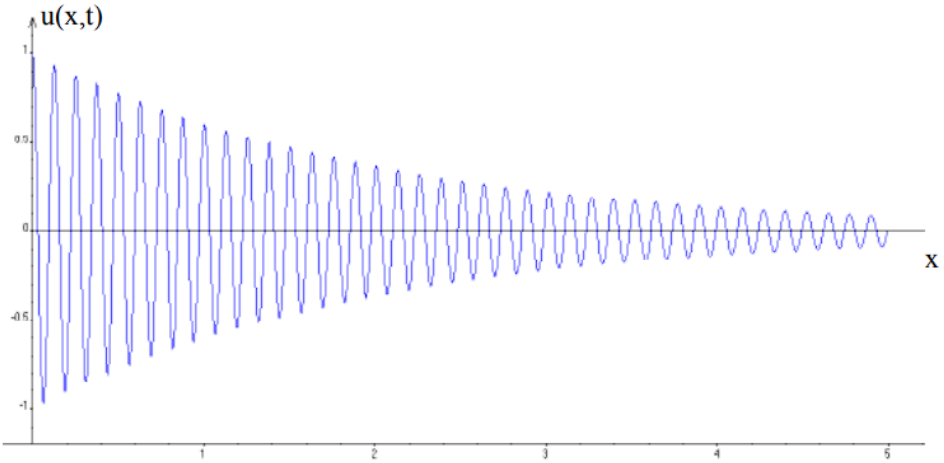
$$u(x,t) = u_0 e^{k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x + \phi_0)$$

4.3. Absorption

En présence de phénomènes dissipatifs, la partie imaginaire k_2 de $\underline{k}$ est négative. Si on note $\delta = -1/k_2$ (profondeur d'atténuation ou longueur d'extinction) on a :

$$u(x,t) = u_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k_1 x + \phi_0)$$

Dans ce cas l'amplitude décroît exponentiellement avec x, comme nous l'avions précisé au paragraphe 4.1. C'est pourquoi on parle d'onde pseudo-harmonique (de manière analogue à un régime pseudopériodique) :



Cela caractérise le phénomène d'absorption, et le milieu est dit absorbant.

REMARQUE IMPORTANTE

Comme nous l'avons vu dans l'équation de dispersion, k_2 est une fonction de ω ce qui signifie que certaines fréquences sont davantage absorbées que d'autre. C'est pourquoi le phénomène de dispersion est rarement isolable du phénomène d'absorption.

4.4. Dispersion. Vitesse de phase. Vitesse de groupe

Pour étudier la dispersion seule, on considère un milieu transparent, donc sans absorption : $k_2 = 0$.

L'onde réelle a donc pour expression :

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - k_1(\omega) x + \phi_0)$$

La phase de l'onde a pour expression :

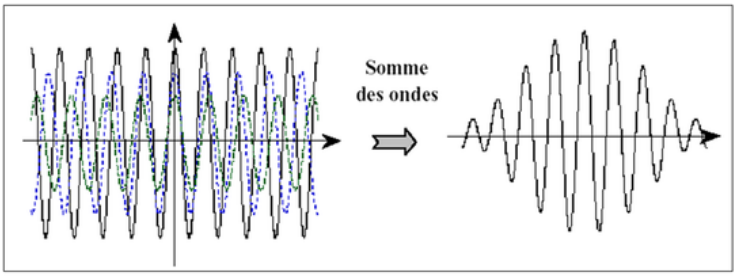
$$\phi(x,t) = \omega t - k_1(\omega) x + \phi_0$$

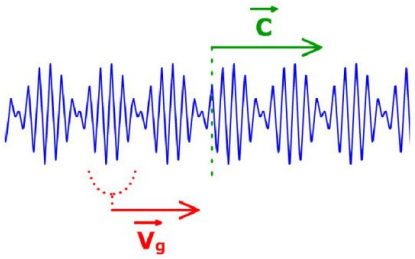
Le fait que k_1 dépende de ω implique que la vitesse de propagation de l'onde dépend de la pulsation, ce qui produit le phénomène de dispersion. On dit que le milieu est **dispersif**.

Cette vitesse de propagation est appelée **vitesse de phase** et notée v_ϕ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_1(\omega)}$$

Pour bien comprendre le phénomène de dispersion, il ne faut donc pas se contenter d'étudier une seule onde progressive (une harmonique) mais une superposition d'ondes appelée paquet d'ondes.





La propagation de ce paquet d'ondes permet alors de distinguer deux vitesses de propagation différentes : la **vitesse de phase**, qui est la vitesse de propagation d'un plan équiphase (la vitesse des « vagues »), et la **vitesse de groupe**, qui est la vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes (la vitesse du paquet).

Pour comprendre cela, nous allons considérer des exemples simples.

Superposition de deux ondes de pulsations voisines

Supposons que notre paquet d'ondes est constitué de deux ondes auxquelles on associe les fonctions suivantes :

$$\psi_1(x,t) = \psi_0 \cos(\omega_1 t - k_1(\omega_1)x)$$
$$\psi_2(x,t) = \psi_0 \cos(\omega_2 t - k_1(\omega_2)x)$$

On suppose que les deux pulsations sont voisines :

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$$
$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

Avec $\Delta\omega \ll \omega_0$

L'onde résultante de cette superposition s'écrit :

$$\psi(x,t) = \psi_0[\cos(\omega_1 t - k_1(\omega_1)x) + \cos(\omega_2 t - k_1(\omega_2)x)]$$

Pour calculer et simplifier cette expression, nous utilisons la propriété $\Delta\omega \ll \omega_0$ et on utilise pour la fonction k_1 on utilise un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$k_1(\omega_1) = k_1(\omega_0) - \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk}{d\omega}(\omega_0) = k_1(\omega_0) - \frac{\Delta k_1}{2}(\omega_0)$$
$$k_1(\omega_2) = k_1(\omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk}{d\omega}(\omega_0) = k_1(\omega_0) + \frac{\Delta k_1}{2}(\omega_0)$$

On peut donc écrire :

$$\psi(x,t) = \psi_0\left[\cos\left(\omega_0 t - k_1 x + \frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta k_1}{2}x\right) + \cos\left(\omega_0 t - k_1 x - \frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k_1}{2}x\right)\right]$$

On peut à nouveau exploiter la relation :

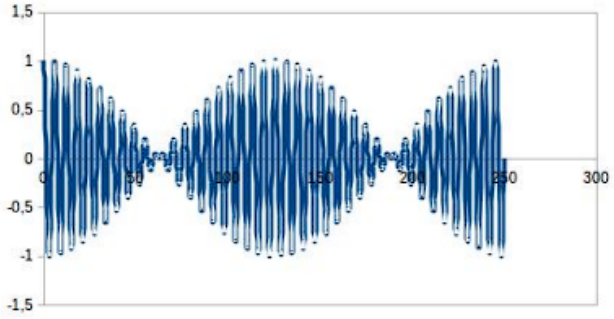
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)\cos(a-b)]$$

Soit :

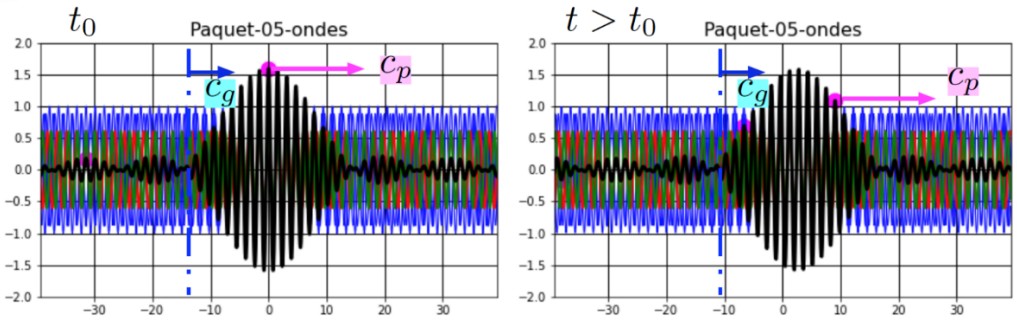
$$\psi(x,t) = 2\psi_0 \cos(\omega_0 t - k_1 x) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t + \frac{\Delta k_1}{2} x\right)$$

Cette expression fait donc apparaître deux termes se propageant à des vitesses différentes :

- L'onde moyenne de pulsation ω_0 qui se propage à la vitesse $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_1}$. Cette vitesse est la vitesse de phase.
- L'enveloppe de l'onde qui se propage à la vitesse de groupe : $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_1} = \frac{d\omega}{dk}$



La superposition des deux ondes n'est plus monochromatique et commence à se localiser sous forme de paquets : des annulations apparaissent dans la fonction d'onde. On parle de phénomène de battement.

Paquet à N ondes

Nous n'aborderons pas ici l'aspect mathématique, plus complexe que précédemment, mais nous observons le résultat : la séparation sous forme de paquets est encore plus nette :