

Exercice n°0 « Technique de la feuille blanche »

Munissez-vous d'une feuille blanche et rédigez :

- 1) Théorème des valeurs intermédiaires
- 2) Théorème de Rolle
- 3) Théorème des accroissements finis.
- 4) DL de e^x , $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\frac{1}{1-x}$ et $\ln(1-x)$
- 5) Théorème de la bijection
- 6) Formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$
- 7) Les expressions des suites récurrentes : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ selon l'équation caractéristique.
- 8) Définition d'un sous-groupe
- 9) Définition d'un sous-espace vectoriel
- 10) Définition de morphisme de groupe, isomorphisme de groupe, automorphisme de groupe.
- 11) Théorème du rang
- 12) Critère de Riemann pour une série
- 13) Règle de d'Alembert pour une série.
- 14) Formule du binôme de Newton
- 15) Définition d'une relation d'équivalence
- 16) Théorème fondamental de l'analyse permettant d'obtenir l'existence d'une primitive.
- 17) Définition d'une fonction dérivable en un réel « a »
- 18) Définition à l'aide de quantificateurs d'une fonction continue en « a »
- 19) Définition d'une fonction convexe, d'une fonction concave
- 20) Définition de matrices semblables, équivalentes, inversibles
- 21) Citer le théorème affirmant la dérivabilité d'une fonction réciproque, et donner cette dérivée.
- 22) Rappeler pour une suite récurrente, le lien entre monotonie de la suite et monotonie de l'itératrice.
- 23) Définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme. Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$
- 24) Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, et $C=AB$, donner l'expression de C_{ij}

Exercice n°1 (Khal MPSI Wallon)

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que : } x + 2y + t = 0 \text{ et } y - z + 3t = 0\}$

Soit $G = \text{vect}((1,1,0,1) ; (2,-1,2,0))$

- 1) Montrer que F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, déterminer une base et sa dimension.
- 2) Même question avec G
- 3) F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
- 4) Déterminer dans une base adaptée, la matrice de la projection sur G parallèlement à un supplémentaire de G .
- 1) $u \in F$ ssi $\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ y - z + 3t = 0 \end{cases}$ c'est un système de deux équations à 4 inconnues, il y a donc 2 degrés de liberté : On va décrire le système avec deux variables, par exemple z et t .

D'où : $\begin{cases} x + 2y = -t \\ y = z - 3t \end{cases}$ et $u(5t-2z,-3t+z,z,t) = t(5,-3,0,1)+z(-2,1,1,0)$ avec $(z,t) \in \mathbb{R}^2$
Et $u \in \text{vect}((5,-3,0,1) ; (-2,1,1,0))$

Réciproquement si $u \in \text{vect}((5, -3, 0, 1); (-2, 1, 1, 0))$ alors u vérifie $\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ y - z + 3t = 0 \end{cases}$

Ainsi $F = \text{vect}((5, -3, 0, 1); (-2, 1, 1, 0))$ donc F est un sous-espace vectoriel.

Clairement les deux vecteurs $((5, -3, 0, 1); (-2, 1, 1, 0))$ forment un système libre car les coordonnées ne sont pas proportionnelles. Il s'agit d'une base de F , et $\dim(F) = 2$

2) Immédiatement $G = \text{vect}((1, 1, 0, 1); (2, -1, 2, 0))$ est un sous-espace vectoriel, et comme les deux vecteurs forment un système libre alors $\dim G = 2$

3) Déjà $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$

Soit $u \in F \cap G$, alors $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $u = \alpha(1, 1, 0, 1) + \beta(2, -1, 2, 0) = (\alpha + 2\beta, \alpha - \beta, 2\beta, \alpha)$ et les coordonnées de u vérifient $\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ y - z + 3t = 0 \end{cases}$ d'où après calculs : $\alpha = \beta = 0$ et $F \cap G = \{0\}$

Ainsi : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

4) Une base adaptée est une base de $\mathbb{R}^4$ obtenue par la concaténation d'une base de F avec une base de G

Dans une telle base, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n°2

Les 4 questions sont indépendantes.

- 1) A) Déterminer la forme algébrique de $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$
 B) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$
 C) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$
 D) Pour $a \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$
 E) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12})$ est solution de l'équation $4x^2 = 2 + \sqrt{3}$
 F) Retrouver alors la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$

2) Linéariser l'expression $\sin(3x)\cos^2(x)$

3) A) Déterminer les racines carrées de $4 + 3i$

B) Soit n un entier non nul, résoudre l'équation $z^{2n} = (4 + 3i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

4) A) Pour $\cos(\theta) \neq 0$, on définit : $S = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k \theta}$ et $T = S = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k\theta)}{\cos^k \theta}$

Calculer $S + iT$

B) En déduire les valeurs de S et de T

1) A) On a $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

B) On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

C) ainsi $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4}$, on en déduit que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}+1}{4} \sin(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ et $\tan(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

D) Par le cours $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$

E) Dans $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ pour $a = \frac{\pi}{6}$, on obtient $\cos(\frac{\pi}{3}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{6}) - 1$

$$\text{Soit } \frac{\sqrt{3}}{2} = 2x^2 - 1$$

F) Donc $x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$ or $x > 0$ donc $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$

2) On a $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin(3x)\cos^2(x) = \frac{\sin(3x) + \sin(3x)\cos(2x)}{2}$

On retrouve facilement $\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$

$$\text{Donc } \sin(3x)\cos(2x) = \frac{\sin(5x) + \sin(x)}{2}$$

$$\text{Soit : } \sin(3x)\cos(2x) = \frac{\sin(5x) + \sin(3x) + \sin(x)}{2}$$

3) A) On pose $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = 4 + 3i$ d'où $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 3 \end{cases}$

$$\text{Et } \delta = \frac{3+i}{\sqrt{2}} \text{ ou } -\frac{3+i}{\sqrt{2}}$$

B) De $z^{2n} = (4 + 3i)^n \Leftrightarrow z^{2n} = \delta^{2n}$ donc $\left(\frac{z}{\delta}\right)^{2n} = 1$

$$\text{Ainsi } \frac{z}{\delta} = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} \text{ et } k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$$

$$\text{Finalement } S = \left\{ \pm \frac{3+i}{\sqrt{2}} e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \right\}$$

$$4) S + iT = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)} \right)^k = \frac{1 - \left(\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}}$$

Il reste à identifier parties réelle et imaginaire...

$$\text{D'où } S = \frac{\cos(n\theta) - \cos((n+1)\theta)}{\cos^{n+1}\theta \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \right)} \text{ et } T = \frac{\frac{-\sin((n+1)\theta)}{\cos^{n+1}\theta} + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} + \frac{\sin(n\theta)}{\cos^{n+1}\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1}$$

Exercice n°3

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite pseudo-magique s'il existe un réel $S(A)$ tel que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} = S(A)$

Soit E l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 1) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- 2) Montrer que A est pseudo-magique si et seulement s'il existe un réel μ tel que $AJ = JA = \mu J$
- 3) Soit A une matrice de E inversible, montrer que $S(A) \neq 0$, montrer que A^{-1} appartient à E . Que vaut $S(A^{-1})$?

1) La matrice nulle est dans E, Si $A \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha A \in E$ et $S(\alpha A) = \alpha S(A)$

Et si $(A, B) \in E^2, A+B \in E, S(A+B) = S(A)+S(B)$

D'où E sev

2) Si $C=AJ$ alors $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}J_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} = S(A)$

De même, $JA=S(A)J$

3) Si $S(A)=0$ alors $AJ=0$ donc $A^{-1}AJ=A^{-1}0$ et $J=0$ absurde !

De façon évidente : $J=S(A)JA^{-1}$ d'où $JA^{-1} = \frac{1}{S(A)}J$ et $S(A^{-1}) = \frac{1}{S(A)}$

Exercice n°4 (Khal Châtelet)

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0, f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et paire.

b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.

c) En déduire que f est dérivable en 0, et donner $f'(0)$

d) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $t \neq 0$, calculer $f'(t)$

e) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-1}{2} t^2 f'(t)$

f) En déduire le sens de variation de f .

2) Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(0)=1$ et $\forall x \neq 0, \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

b) Montrer que pour tout x réel, $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$ (on pourra commencer par supposer $x > 0$)

c) Montrer que pour tout réel x non nul, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \varphi(x))$

d) Montrer que φ est dérivable en 0, et que $\varphi'(0) = 0$

e) Donner les variations de φ

f) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$

g) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

1) a) Tout d'abord, retrouvons le DL de arctan

$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, or $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$, donc $\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$ soit: $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$

On obtient: $f(t) = 1 - \frac{1}{3}t^2 + o(t^2)$, d'où $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$ or $f(0)=1$ donc f est continue en 0

De plus, f est le quotient de 2 fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$

Comme f est le quotient de deux fonctions impaires, alors f est paire.

b) on a : $f(t) = 1 + o(t)$

c) Comme f admet un DL à l'ordre 1 en 0, alors f est dérivable et $f'(0)=0$

d) Comme f est le quotient de 2 fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Le calcul donne : $f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan(t)}{t^2}$

e) On a : $\int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^t x \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$

On pose $u=x$ et $v=\frac{-1}{1+x^2}$, ces deux fonctions sont C^1 , par IPP : $\int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-1}{2} t^2 f'(t)$

f) Le signe de f' dépend du signe de $\int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ et il est l'opposé de celui de

$\int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$, pour $t>0$, $\int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx > 0$ et pour $t<0$, $\int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx < 0$ (en effet les bornes ne sont pas dans l'ordre croissant !)

Ainsi, f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$

2) a) Tout d'abord, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ est bien définie, et C^1

Pour $x \neq 0$, φ est le quotient de deux fonctions continues avec le dénominateur ne s'annulant pas, donc φ continue sur $\mathbb{R}^*$

Sinon, $\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt - \int_0^0 f(t)dt}{x-0}$, il s'agit du taux d'accroissement de $x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ entre 0 et x , or comme $x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ est dérivable, ce taux a une limite en 0 égale à la dérivée de $\int_0^x f(t)dt$ évaluée en 0, c'est-à-dire à $f(0)=1$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$ et φ continue sur $\mathbb{R}$

Comme f est paire, $\int_0^x f(t)dt$ est impaire et φ est paire

b) Si $x>0$, $\varphi(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(0)dt = 1$ (car $f(0)$ est le max de f) donc $\varphi(x) \leq 1$

Et sur $[0,x]$, f est décroissante donc $f(x) \leq f(t)$ d'où $\frac{1}{x} \int_0^x f(x)dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$

Et $f(x) \leq \varphi(x)$

D'où $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$ et de même si $x<0$

c) Directement : $\varphi'(x) = \frac{-1}{x} \varphi(x) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \varphi(x))$

d) De $f(t) = 1 - \frac{1}{3} t^2 + o(t^2)$, on tire $\int_0^x f(t)dt = x - \frac{1}{9} x^3 + o(x^3)$ et $\varphi(x) = 1 + o(x)$

Donc φ admet un DL à l'ordre 1 en 0, donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$

e) Comme $\varphi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \varphi(x))$ et $f(x) \leq \varphi(x)$, alors $\varphi'(x) \leq 0$ et φ décroissante.

f) On a $f(t) \leq \frac{\pi}{2t}$, donc $\frac{1}{x} \int_1^x f(x)dt \leq \frac{\pi \ln(x)}{2x} \rightarrow 0$

g) Par la relation de Chasles : $\varphi(x) = \frac{1}{x} (\int_0^1 f(x)dt + \int_1^x f(x)dt)$ avec $\frac{1}{x} \int_1^x f(x)dt \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \int_0^1 f(x)dt \rightarrow 0$ car $\int_0^1 f(x)dt \leq 1$ (d'après c))

Exercice n°5 (Khal Châtelet)

Notations : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement le corps des réels et celui des complexes.

On pose: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, et $L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $r(A) = a+d$

1) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2) Etablir que (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- 3) Donner la matrice représentative de σ dans cette base.
 - 4) Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$, montrer que $\sigma(AB) = \sigma(B) \sigma(A)$
 - 5) Justifier que pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A\sigma(A) = \text{Det}(A)I_2$
 - 6) Montrer que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est également.
 - 7) Exprimer $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A .
 - 8) Vérifier que r est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
 - 9) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, exprimer $\sigma(A)$ à l'aide de A , I et $r(A)$
- 1) On vérifie aisément que $\sigma^2(A)=A$ donc $\sigma^2 = I_2$ donc σ est une symétrie du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- 2) $\text{Card}(I,J,K,L)=4=\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$
 Montrons à présent que la famille (I,J,K,L) est libre.
 Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tels que $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L = 0$
 D'où : $\begin{pmatrix} \alpha - i\delta & -\beta + i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha + i\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 Et : $\alpha - i\delta=0, -\beta + i\gamma=0, \beta + i\gamma=0$ et $\alpha + i\delta=0$
 On obtient facilement : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ donc la famille est libre et (I,J,K,L) est une base !
- 3) On calcule : $\sigma(I)=I, \sigma(J) = -J, \sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$
 On obtient la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- 4) Par le calcul, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on obtient $\sigma(AB) = \sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$
 Et $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + da' & b'c + dd' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b'c + dd' & -ab' - bd' \\ -a'c - da' & aa' + bc' \end{pmatrix}$
 D'autre part, $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\sigma(B) = \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}$
 et $\sigma(B) \sigma(A) = \begin{pmatrix} b'c + dd' & -ab' - bd' \\ -a'c - da' & aa' + bc' \end{pmatrix}$
 Donc : $\sigma(AB) = \sigma(B) \sigma(A)$
- 5) On obtient $A\sigma(A) = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2 = \text{det}(A)I_2$
- 6) Si A est inversible alors $\sigma(A) \neq 0$ alors $\frac{A}{\text{det}(A)} \sigma(A) = I_2$ donc $\sigma(A)$ est inversible à gauche, et donc inversible !
- 7) On a ainsi $\sigma(A)^{-1} = \frac{A}{\text{det}(A)}$
 De plus $\sigma(AB) = \sigma(B) \sigma(A)$, et pour $B = A^{-1}$, et sachant que $\sigma(I)=I$
 On a : $\sigma(A)^{-1} = \sigma(A^{-1})$
- 8) On a clairement r forme linéaire ! (par le cours...il s'agit de la trace !)
- 9) $A + \sigma(A) = (a+d)I_2$ d'où $\sigma(A) = r(A)I_2 - A$

Exercice n°6 (Khal Châtelet)

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on considère l'équation différentielle :

$$(E) : (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x)$$

On définit les fonctions F et G de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_0^x e^t \varphi(t) dt$ et $F(x) = \frac{G(x)}{e^x - 1}$

- 1) Montrer que F et G sont des applications C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$
- 2) Déterminer le développement de Taylor de G à l'ordre 2.
- 3) En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 :

$$F(x) = \varphi(0) + \frac{x}{2} \varphi'(0) + o(x)$$

- 4) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction ainsi prolongée.
- 5) Préciser alors F(0)
- 6) Démontrer que F est dérivable en 0 et préciser F'(0)
- 7) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle : $(E_0) : (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = 0$
- 8) Montrer que F vérifie (E) sur $\mathbb{R}_+^*$
- 9) a) Exprimer la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$
b) Vérifier que F est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant une limite finie en 0.

- 1) La fonction $t \mapsto e^t \varphi(t)$ est continue comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Et $t \mapsto \int_0^t e^x \varphi(x) dx$ est ainsi définie et C^1 sur $\mathbb{R}$

F est le quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$ donc F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

- 2) $G(0) = 0$

$$G'(x) = e^x \varphi(x) \text{ donc } G'(0) = \varphi(0)$$

$$G''(x) = e^x \varphi(x) + e^x \varphi'(x) \text{ et } G''(0) = \varphi(0) + \varphi'(0)$$

$$\text{D'où } G(x) = \varphi(0)x + \frac{\varphi(0) + \varphi'(0)}{2} x^2 + o(x^2)$$

- 3) On a $\frac{G(x)}{e^x - 1} = \frac{\varphi(0)x + \frac{\varphi(0) + \varphi'(0)}{2} x^2 + o(x^2)}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$

$$\text{Et } F(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{2} x + o(x)$$

- 4) F admet un DL à l'ordre 1 donc $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \varphi(0)$, on peut donc prolonger F par continuité en posant $F(0) = \varphi(0)$

- 5) $F(0) = \varphi(0)$

- 6) F admet un DL à l'ordre 1 donc F dérivable en 0 et $F'(0) = \frac{\varphi'(0)}{2}$

- 7) Par le cours : $y = Ae^{-\ln(e^x - 1)} = \frac{A}{e^x - 1}$ avec $A \in \mathbb{R}$

- 8) $F'(x) = \frac{G'(x)(e^x - 1) - G(x)e^x}{(e^x - 1)^2}$, et on vérifie que $(1 - e^{-x})F'(x) + F(x) = \varphi(x)$

Donc F vérifie (E)

- 9) A) On en déduit que $y = F(x) + \frac{A}{e^x - 1}$ avec $A \in \mathbb{R}$

B) Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$, nécessairement $A=0$ d'où $y(x) = F(x)$

Exercice n°7 (Prépa INP)

Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

- 1) Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X], P \mapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right]$
 - a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
 - b) Ecrire la matrice représentative de f dans B
 - c) Justifier que f soit bijective.
- 2) Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(1)$, on admet que φ est linéaire
 - a) Déterminer $\dim(\text{Ker}(\varphi))$
 - b) Donner une base de $\text{Ker}(\varphi)$

3) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, on note $B' = (1, 1-2X, 1-6X+6X^2)$

- a) Justifier que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
- b) Ecrire la matrice représentative de f dans B'
- c) Ecrire la matrice de passage Q de B à B'
- d) Justifier que Q est inversible

e) Montrer que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$,

- 1) a) Clairement $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ et $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha P) = \alpha f(P)$

De plus, clairement, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$

- b) On a $f(1)=1, f(X)=\frac{1}{4} + \frac{1}{2}X$ et $f(X^2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2$

D'où $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

- c) On a $\det(M_B(f)) = \frac{1}{4} \neq 0$ donc M inversible donc f bijective.

- 2) a)b) $P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow P(1)=0$ d'où $P(X)=(X-1)(aX+b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

et $P(X)=aX(X-1)+b(X-1)$, soit $P \in \text{vect}(X(X-1), X-1)$

Réciproquement si $P \in \text{vect}(X(X-1), X-1)$, clairement $P(1)=0$

Finalement $\text{Ker}(f) = \text{vect}(X(X-1), X-1)$

Et $\dim(\text{Ker}(f))=2$ car $(X(X-1), X-1)$ est une famille de polynômes de degrés différents donc libre.

- 3) a) Il s'agit d'une famille échelonnée de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ donc libre, et son cardinal correspond à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$

Sinon, on pourrait aussi construire la matrice par concaténation des vecteurs et voir que le déterminant est différent de 0.

- b) On a $f(1)=1, f(1-2x)=\frac{1}{2}(1-2X)$ et $f(1-6X+6X^2)=\frac{1}{4}(1-6X+6X^2)$

Et $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

c) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- d) C'est une matrice de passage entre deux bases donc elle est inversible

Sinon, $\det(Q)=-12$ donc inversible !

- e) La méthode de Gauss-Jordan fonctionne bien, mais on peut vérifier que

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Exercice n°8 (Prépa INP)

On considère les polynômes $P=X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 2X^2 - 1$ et $Q=X^4 + X^2$

- 1) Effectuer la division euclidienne de P par Q
- 2) Factoriser Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
- 3) Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$
- 4) Calculer la valeur de $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^4+3x^3+2x^2-1}{x^4+x^2} dx$

- 1) La division euclidienne donne : $X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 2X^2 - 1 = (X^4 + X^2)(X + 2) + 2X^3 - 1$
- 2) $Q(X) = X^2(X^2+1)$
- 3) On a $\frac{P}{Q} = X + 2 + \frac{2X^3-1}{X^4+X^2}$

Décomposons en éléments simples : $\frac{2X^3-1}{X^4+X^2}$

Factorisons : $\frac{2X^3-1}{X^4+X^2} = \frac{2X^3-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X^2} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2+1}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$

En multipliant par X^2 et en prenant $X=0$, on obtient $-1 = \beta$

En multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini : $2 = \alpha + \gamma$

Pour $X=1$, $\frac{1}{2} = \alpha + \beta + \frac{\gamma + \delta}{2}$

Pour $X=-1$, $\frac{1}{2} = -\alpha + \beta + \frac{-\gamma + \delta}{2}$

D'où : $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 2$ et $\delta = 1$

Finalement : $\frac{2X^3-1}{X^4+X^2} = \frac{-1}{X^2} + \frac{2X+1}{X^2+1}$

$$4) I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x + 2 + \frac{2x^3-1}{x^4+x^2} \right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x + 2 + \frac{-1}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx$$

Or une primitive de $x + 2 + \frac{-1}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + \ln(x^2 + 1)$

$$\text{Donc } I = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + \ln(x^2 + 1) \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2} - 2 + \ln(2) + \frac{\pi}{12}$$

Exercice n°9 (Prépa INP)

L'objectif de ce problème est de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

On introduit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

- 1) Soit p un entier, tel que $p > 0$, montrer que $\frac{1}{p^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(pt) dt$
- 2) En déduire que pour tout entier $n > 0$, $S_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt$
- 3) Soit $t=0$, calculer $\sum_{k=1}^n \cos(kt)$
- 4) Soit $t \in]0, \pi]$, montrer que $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{it} \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}})$
- 5) En déduire que $\forall t \in [0, \pi], \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \varphi_n(t)$ avec $\varphi_n \begin{cases} \frac{-1}{2} + \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ n & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- 6) Pour $n > 0$, on définit f_n sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ par $f_n : t \rightarrow \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2 \sin(\frac{t}{2})}$

Montrer que f_n peut se prolonger par continuité sur $[-\pi, \pi]$, on appellera encore f_n ce prolongement.

Préciser $f_n(0)$

- 7) Montrer que f_n est dérivable en 0.

1) On a $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(pt) dt = \int_0^\pi \frac{t^2}{2\pi} \cos(pt) dt - \int_0^\pi t \cos(pt) dt$

Soit : $I_1 = \int_0^\pi \frac{t^2}{2\pi} \cos(pt) dt$ et $I_2 = \int_0^\pi t \cos(pt) dt$

Pour I_1 , on procède par IPP en posant $u=t^2$ et $v=\frac{1}{p} \sin(pt)$ avec u et $v \in C^1$

$$I_1 = \left[\frac{t^2 \sin(pt)}{p} \right]_0^\pi - \frac{2}{p} \int_0^\pi t \sin(pt) dt$$

Et on calcule $\int_0^\pi t \sin(pt) dt$ encore par IPP, en posant $u=t$ et $v=-\frac{1}{p} \cos(pt)$

$$\text{Et } I_1 = \frac{2\pi(-1)^p}{2\pi p^2}$$

$$\text{Et } I_2 = \frac{-(-1)^{p+1}}{p^2}$$

$$I = \frac{1}{p^2}$$

2) On a : $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

3) Pour $t=0$, $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = n$

4) De façon générale : $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \operatorname{Re}(\sum_{k=1}^n e^{ikt}) = \operatorname{Re}(e^{it} \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}})$

5) On part de $e^{it} \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = e^{it} \frac{e^{\frac{in}{2}t} (e^{-\frac{in}{2}t} - e^{\frac{in}{2}t})}{e^{\frac{it}{2}} (e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}})} = e^{i\frac{n+1}{2}t} \frac{2i \sin(\frac{nt}{2})}{2i \sin(\frac{t}{2})}$

$$\text{D'où } \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{-1}{2} + \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$$

6) $\sin(\frac{t}{2}) = \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{t^3}{8} + o(t^3)$ et $\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \times \frac{1}{t} \times \frac{1}{1 - \frac{t^2}{24} + o(t^2)} = -1 + \frac{t}{2\pi} + \frac{t^2}{24} - \frac{t^3}{48\pi} + o(t^3)$

$$\text{Et } f_n(t) = -1 + \frac{t}{2\pi} + \frac{t^2}{24} - \frac{t^3}{48\pi} + o(t^3)$$

Donc f_n est prolongeable par continuité en posant : $f_n(0) = -1$

7) Le DL à l'ordre 1 prouve que f_n est dérivable et $f_n'(0) = \frac{1}{2\pi}$

Problème n°10

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Soit n un entier naturel non nul, déterminer l'expression de D^n
- 2) On souhaite démontrer que P est inversible de trois façons différentes :
 - a) Méthode n°1 : Déterminer le rang de P et conclure.
 - b) Méthode n°2 : Calculer le produit PQ et conclure.

c) Méthode n°3 : En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, déterminer par le même coup P^{-1}

3) Pour n entier non nul, démontrer, par récurrence, que $M^n = PD^nP^{-1}$

4) En déduire l'expression de M^n sous forme matricielle.

5) On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par : $u_0=0, v_0=0, w_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{4} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{4} \\ w_{n+1} = \frac{u_n + 2w_n}{4} \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n

6) a) En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

b) Déterminer l'expression de (u_n) , (v_n) et (w_n) en fonction de n.

c) Déterminer les limites de (u_n) , (v_n) et (w_n)

1) On a : $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{4})^n \end{pmatrix}$

2) a) $\text{Rg}(P) = \text{Rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

Donc $\dim \text{Ker}(P)=0$ et P inversible.

b) $PQ = 3I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$

c) On a : $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 = L_2 - L_3$ d'où : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 = 2L_3 + L_1$ d'où : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$L_1 = L_2 + L_3$ et $L_2 = 3L_1 - L_3$ d'où : $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Il reste à diviser L_1 par -6 et L_3 par 3 d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3) On a $M^0 = I_3$ vérifié au rang 0, si $M^n = PD^nP^{-1}$, alors $M^{n+1} = M^n M = PD^nP^{-1}PD P^{-1}$
Et : $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

4) Donc : $M^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^{n-1}}{4^n} & 0 & \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{4^n} \\ 1 - \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{4^n} & 1 & -\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \\ \frac{3^{n-1}}{4^n} & 0 & \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{4^n} \end{pmatrix}$

5) On a : $X_{n+1} = MX_n$

6) a) Par récurrence : $X_n = M^n X_0$

$$b) \text{ Donc : } X_n = \begin{pmatrix} \frac{3^{n-1}}{4^n} & 0 & \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{4^n} \\ 1 - \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{4^n} & 1 & -\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \\ \frac{3^{n-1}}{4^n} & 0 & \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } u_n = \frac{1}{2} \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}, v_n = -\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \text{ et } w_n = \frac{1}{2} \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$$

c) Les 3 limites sont égales à 0.

Problème n°11

Dans ce problème, I désigne l'intervalle $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$

On considère l'équation différentielle (1) : $xy'' + 2y' - xy = 4xe^x$ où y désigne une fonction réelle de la variable x, définie sur I.

- 1) Pour $x \in I$, on pose $z(x) = xy(x)$
Montrer que $x \rightarrow y(x)$ est solution de (1) si et seulement si $x \rightarrow z(x)$ est solution d'une équation différentielle (2) que l'on précisera.
- 2) On cherche ici une solution particulière de l'équation différentielle (2). On se propose de la déterminer sous la forme $x \rightarrow P(x)e^x$ où P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$
 - a) Montrer que si P existe, alors $\deg(P) = 2$
 - b) En déduire la solution particulière sous la forme souhaitée.
- 3) Résoudre sur I, l'équation différentielle (2)
- 4) En déduire la résolution sur I de l'équation différentielle (1)
- 5) On souhaite déterminer ici les solutions $x \rightarrow y(x)$ de l'équation (1) mais définies sur $\mathbb{R}$
 - a) Chercher les solutions qui vérifient l'équation en $x=0$, continues et deux fois dérivables en 0.
 - b) Indiquer si elle existe la solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0)=0$

- 1) Si $z=xy$ alors $z'=y+xy'$ et $z''=2y'+xy''$

$$\text{Donc } z'' - z = 4xe^x$$

La réciproque est immédiate

- 2) A) Si $z=P(x)e^x$ alors $z''=(P''(x)+2P'(x)+P(x))e^x$ et $z''-z=4xe^x \Leftrightarrow P''+2P'=4X$
D'où $\deg(P')=1$ et $\deg(P)=2$

B) On cherche P sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Et } P''+2P'=4X \Leftrightarrow (4a-4)X + (2a+b)=0$$

D'où $a=\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{1}{2}$ aucune contrainte sur c, qu'on peut par exemple prendre égale à 0.

$$\text{Finalement } z(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\right)e^x$$

- 3) On construit l'EHA : $z'' - z = 0$ son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$

Comme $r=1$ ou -1

On en déduit que $z = Ae^x + Be^{-x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

Et la solution générale est $z(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\right)e^x + Ae^x + Be^{-x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

- 4) D'où sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, on a $y(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2x}\right)e^x + \frac{Ae^x + Be^{-x}}{x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

- 5) A) Peut-on prolonger une solution en 0 ?

Soit $\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2x}\right)e^x + \frac{Ae^x + Be^{-x}}{x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et effectuons un DL en 0 à l'ordre 1 :

On a $y(x) = \frac{1}{4}xe^x + \frac{A+B-\frac{1}{2}}{x} + A - B - \frac{1}{2} + \frac{A+B-\frac{1}{2}}{2}x + o(x)$

Ainsi y a une limite en 0 ssi $A + B - \frac{1}{2} = 0$ et $y(0)=2A-1$

De plus $y'(0)=0$

En réinjectant dans l'équation différentielle : $y''(0)=2A-1$

Donc on peut prolonger la solution en 0 si $A + B - \frac{1}{2}$

B) De $y(0)=0$, on obtient $A = \frac{1}{2}$ et $y(x) = \frac{1}{4}xe^x$

Problème n°12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\cos^2(x)}{x^2}$

- 1) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2
- 2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0, on notera encore f ce prolongement
- 3) La fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f, et la position de la tangente en 0 par rapport à la courbe.

1) On a $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ et $\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

D'où : $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$

- 2) Comme f admet un $DL_2(0)$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}$, on peut ainsi prolonger f par continuité en posant $f(0) = \frac{3}{2}$
- 3) Comme f admet un $DL_2(0)$ alors f est dérivable en 0, et $f'(0)=0$
- 4) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{3}{2}$ et $f(x) - \frac{3}{2} \sim -\frac{1}{4}x^2$ donc la courbe est localement sous la tangente.

Problème 13

On définit la suite (u_n) par : $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$

- 1) Calculer u_1 et u_2
- 2) Justifier que la suite est bien définie. La suite est-elle bornée ?
- 3) Démontrer que les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones, et préciser leur sens de variation.
- 4) Démontrer que les suites u_{2n} et u_{2n+1} convergent et préciser leur limite.
- 5) Que peut-on en conclure quant à la suite (u_n) ? Déterminer la limite de (u_n)

1) On a $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{2}{3}$

2) Par récurrence, on montre facilement que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Or si $u_n > 0$, alors $u_n \neq -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$ est bien définie.

3) On identifie la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ comme itératrice.

Cette fonction est décroissante, donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Comme $u_2 - u_0 = \frac{-1}{3} < 0$, on en déduit que (u_{2n}) est décroissante et par conséquent, (u_{2n+1}) est croissante.

4) On montrerait facilement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$

Ainsi (u_{2n+1}) est croissante et majorée donc elle converge

Et (u_{2n}) est décroissante et minorée donc elle converge.

Déterminons l'itératrice de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}) , il s'agit de la fonction $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{x+1}{x+2}$

Or, les points fixes de $\frac{x+1}{x+2}$ correspondent aux solutions de : $\frac{x+1}{x+2} = x$, soit $x^2 + x - 1 = 0$

On obtient deux solutions potentielles : $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ on ne conserve que la solution positive, soit $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Finalement (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite : $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

5) Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite : $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Problème n°14

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$

Soit $g : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \right) dt$

- 1) Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que $f'(x) = \frac{3(1-x^4)}{\sqrt{4+x^4}\sqrt{1+4x^4}(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+x^4})}$
- 3) Montrer que f est impaire
- 4) Montrer que : $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$
- 5) Donner le DL de f en 1 à l'ordre 0 et en déduire une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
- 6) Pour $x > 0$, donner un encadrement de $f(x)$, en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
(On pourra utiliser une fonction qui majore $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$)
- 7) En déduire le tableau de variations de f .
- 8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{2}{t^6}$
- 9) En déduire que pour tout $x > 0$, $0 \leq g(x) \leq \frac{31}{80x^4}$

1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} dt$ la primitive de $\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ qui s'annule en 0.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(2x) - F(x)$, comme F est continue et dérivable, et que $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}$

on en déduit que F est C^1

Et $x \rightarrow F(2x) - F(x)$ est C^1 et par conséquent f aussi !

2) On dérive : $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$

$$\text{Soit } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{\sqrt{4+x^4} - \sqrt{1+4x^4}}{\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}$$

$$\text{On poursuit : } f'(x) = \frac{(\sqrt{4+x^4} - \sqrt{1+4x^4})}{\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}} = \frac{(\sqrt{4+x^4} - \sqrt{1+4x^4})\sqrt{4+x^4} + \sqrt{1+4x^4}}{\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}(\sqrt{4+x^4} + \sqrt{1+4x^4})} = \frac{3(1-x^4)}{\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}(\sqrt{4+x^4} + \sqrt{1+4x^4})}$$

3) Comme $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est paire, alors F est impaire et donc f est impaire.

4) Sur $[1,2]$: $\frac{1}{\sqrt{4+2^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{4+1^4}}$, donc $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, on passe à l'intégrale, et par croissance de l'intégrale, on obtient le résultat.

5) Comme $f'(0) = \frac{1}{2}$, alors $f(x) = 0 + \frac{1}{2}x + o(x)$ et $y = \frac{1}{2}x$ est l'équation de la tangente à la courbe en 0.

6) On a : $0 \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$, par croissance de l'intégrale : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$

Par encadrement, on en déduit facilement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

7) En exploitant le caractère impaire de f , f est décroissante sur $]-\infty, -1]$, croissante sur $[-1, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$

$$8) \text{ On a } \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} = \frac{\sqrt{4+t^4} - t^2}{t^2\sqrt{4+t^4}} = \frac{(\sqrt{4+t^4} - t^2)(\sqrt{4+t^4} + t^2)}{t^2\sqrt{4+t^4}(\sqrt{4+t^4} + t^2)} = \frac{4}{t^2\sqrt{4+t^4}(\sqrt{4+t^4} + t^2)}$$

$$\text{Donc, } \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \geq 0$$

$$\text{De plus : } \frac{4}{t^2\sqrt{4+t^4}(\sqrt{4+t^4} + t^2)} \leq \frac{4}{t^2\sqrt{t^4}(\sqrt{t^4} + t^2)} = \frac{2}{t^6}$$

9) Par croissance de l'intégrale, on intègre entre x et $2x$: $0 \leq g(x) \leq x \int_x^{2x} \frac{2}{t^6} dt$

D'où le résultat attendu !

Problème n°15

Les deux questions sont indépendantes :

- 1) Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.
 - a) Factoriser le polynôme $P = X^{2n+2} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
 - b) Factoriser le polynôme $P = X^{2n+2} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$
 - c) Simplifier $(X^2 - 1) \sum_{k=0}^n X^{2k}$
 - d) En déduire la factorisation de $Q = \sum_{k=0}^n X^{2k}$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$
- 2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit $P = 2X^4 + 5X^3 + 5X^2 + aX + b$
 - a) Déterminer a et b pour que $P(-1) = P'(-1) = 0$
 - b) Déterminer l'ordre de multiplicité de -1 pour P
 - c) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^2$
 - d) Justifier que le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^3$ est $2(X+1)^2$.
Que vaut le quotient ? On pourra utiliser la formule de Taylor.

1) a) On résout $P(X) = 0$ ce qui donne $X = e^{\frac{2ik\pi}{2n+2}}$ et $k \in \llbracket -n, n+1 \rrbracket$

$$\text{D'où } P(X) = \prod_{k=-n}^n (X - e^{\frac{2ik\pi}{2n+2}}) = \prod_{k=-n}^n (X - e^{\frac{ik\pi}{n+1}})$$

b) On isole les facteurs correspondant à 0 et $n+1$, on rassemble par paires :

D'où : $P(X) = (X+1)(X-1) \prod_{k=1}^n (X - e^{\frac{ik\pi}{n+1}})(X - e^{-\frac{ik\pi}{n+1}}) =$
 $(X+1)(X-1) \prod_{k=1}^n (X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)X + 1)$
c) On a $(X^2-1)\sum_{k=1}^n X^{2k} = \sum_{k=1}^n X^{2k+2} - \sum_{k=1}^n X^{2k} = X^{2n+2} - 1$ (après télescopage)
d) Donc $Q(X) = \frac{P(X)}{X^2-1} = \prod_{k=1}^n (X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)X + 1)$

- 2) a) $P(-1) = 2 - a + b$ et $P'(-1) = -5 + 15 - 10 + a$
d'où $a = 3$ et $b = 1$
b) Comme $P''(-1) = 4 \neq 0$, on en déduit que -1 est de multiplicité 2
c) Le reste est donc 0 puisque P est alors divisible par $(X+1)^2$
d) 1ere méthode : On écrit l'égalité de la division euclidienne, on dérive deux fois, on évalue en -1 ce qui va donner le reste.
2eme méthode ; on utilise la formule de Taylor en -1
 $P(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{(x+1)^k}{k!} P^{(k)}(-1)$
On a $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) = 4$, $P'''(-1) = -18$ et $P^{(4)}(-1) = 48$
D'où $P(X) = 4 \frac{(X+1)^2}{2!} - 18 \frac{(X+1)^3}{3!} + 48 \frac{(X+1)^4}{4!} = 2(X+1)^2 - 3(X+1)^3 + 2(X+1)^4$
Et : $P(X) = (X+1)^3(-3+2(X+1)) + 2(X+1)^2$
Le quotient est : $2X-1$ et le reste $2(X+1)^2$

Problème 16 (INP 2023)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \arctan(x)y = xe^{-x\arctan(x)}$ où y désigne une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

- 1) Justifier l'existence de la primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
- 2) A l'aide d'une IPP, déterminer cette primitive.
- 3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$
- 4) Trouver la solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$
- 5) On cherche à présent à étudier localement en 0 et en $+\infty$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = (1+x^2)e^{-x\arctan(x)}$
 - a) Déterminer le DL à l'ordre 3 de la fonction $\arctan$ en 0
 - b) En déduire un DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction f
 - c) Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe en 0. Préciser la position de la tangente par rapport à la courbe.
 - d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
 - e) A l'aide d'un développement asymptotique à l'ordre 0 en $+\infty$, donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra poser $x = \frac{1}{h}$ avec $h \rightarrow 0^+$)

- 1) La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$
Et $x \mapsto \int_0^x \arctan(t) dt$ est la primitive de $\arctan$ qui s'annule en 0
- 2) Soit $G(x) = \int_0^x \arctan(t) dt = \int_0^x 1 \times \arctan(t) dt$
On pose $u = \arctan(t)$ et $v = t$ les deux fonctions sont C^1 sur $\mathbb{R}$, par IPP, on obtient
 $G(x) = x\arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

- 3) On résout tout l'EHA : $y = Ae^{-\int \arctan} = A\sqrt{1+x^2}e^{-x\arctan(x)}$, $A \in \mathbb{R}$
 On cherche ensuite une SP en utilisant la méthode de variation de la constante.
 Soit $y = A(x)\sqrt{1+x^2}e^{-x\arctan(x)}$
 On a : $y' = (A'(x)\sqrt{1+x^2} + A(x)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})e^{-x\arctan(x)} + A(x)\sqrt{1+x^2}(-\arctan(x) - \frac{1}{1+x^2})e^{-x\arctan(x)}$
 D'où : $\frac{A'(x)}{2+A(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$ et $A = \sqrt{1+x^2} - 2$
 Finalement $y(x) = (1+x^2)e^{-x\arctan(x)} + (A-2)\sqrt{1+x^2}e^{-x\arctan(x)}$, $A \in \mathbb{R}$
- 4) La condition $y(0)=1$ impose $A=2$ d'où $y(x) = (1+x^2)e^{-x\arctan(x)}$
- 5) a) Comme $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$, alors en primitivant :
 $\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
 b) on a $f(x) = (1+x^2)e^{-x(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))} = (1+x^2)e^{-x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}$
 on pose $u = -x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$, on a bien $u \rightarrow 0$ et $u^2 = x^4 + o(x^4)$
 D'où $f(x) = (1+x^2)(1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)) = 1 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$
 c) L'équation de la tangente en $x=0$ est donc $y=1$
 De plus : $f(x)-1 \sim -\frac{1}{6}x^4 < 0$ donc localement, la courbe de f est en-dessous de sa tangente.
 d) on pose $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{-1}{x^2} = 0$ donc φ est constante sur $\mathbb{R}^{*+}$, en particulier $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\varphi(x) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$
 Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$
 e) On pose $h = \frac{1}{x}$, on a bien $h \rightarrow 0$
 On obtient : $f(x) = e^{\frac{-\pi}{2h}+1} (1 + \frac{1}{h^2})e^{\frac{-1}{3}h^2 + o(h^2)}$
 Et $f(x) \sim x^2 e^{-\frac{\pi}{2}x}$

Problème n°17

- Enoncer précisément le théorème du rang.
 - On considère un K -espace vectoriel E de dimension quelconque.
 - Démontrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$
 - Démontrer que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$
 - Démontrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$
 - Démontrer que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$
 - On suppose à présent que E est de dimension finie, montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$
-
- Soit $f : E \rightarrow F$ application linéaire entre les deux espaces vectoriels E et F , E est de dimension finie et F pas nécessairement, alors $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$
 - a) Soit $x \in \text{Ker}(f)$ alors $f(x) = 0$ et $f(f(x)) = f(0) = 0$ car f linéaire donc $x \in \text{Ker}(f^2)$ et ainsi $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$
 b) Soit $y \in \text{Im}(f^2)$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im}(f)$
 - $\Rightarrow$ On suppose que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

On a toujours : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$, il reste à démontrer que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$, on $f^2(x) = 0$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$ or $f(x) \in \text{Im}(f)$

Ainsi $f(x) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, d'où $f(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}(f)$,

Finalement $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$

$\Leftarrow$ On suppose que $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$

Soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $f(y) = 0$ donc $f^2(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(f^2)$

Or $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, donc $x \in \text{Ker}(f)$, et $y = f(x) = 0$

4) $\Rightarrow$ On suppose que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$

On a toujours $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$, il reste à montrer que : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$,

Soit $y \in \text{Im}(f)$, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ or $\exists (x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$

Alors $y = f(x) = f(x_2) \in \text{Im}(f^2)$

$\Leftarrow$ On suppose que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$

Soit $x \in E$, on a $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(x) \in \text{Im}(f^2)$, ainsi $\exists y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$

Et $f(x - f(y)) = 0$ donc $x - f(y) \in \text{Ker}(f)$

Or $x = x - f(y) + f(y)$ avec $x - f(y) \in \text{Ker}(f)$ et $f(y) \in \text{Im}(f)$

5) $\Rightarrow$ On suppose que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

Alors, $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$, d'après 4) $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$, en appliquant le théorème de rang,

$\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$

$\Leftarrow$ On suppose que $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$

En appliquant le théorème du rang, $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$, d'après 4), $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$

De plus, comme $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, d'après 3) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$,

Et : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

Problème n°18 (INP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit E_n l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)e^x$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note b_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i e^x$

- 1) Montrer que E_n est un espace vectoriel
- 2) Montrer que $B_n = (b_0, \dots, b_n)$ est une base de E_n
- 3) Quelle est la dimension de E_n ?
- 4) Montrer que : $\partial : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E_n
- 5) Donner la matrice A de ∂ relativement à B_n
- 6) Est-ce que ∂ est un isomorphisme ?
- 7) Pour n entier naturel non nul, on note I_n la matrice identité et J_n la matrice d'ordre n définie par :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base C_n de E_n dans laquelle la matrice de ∂ est $B = I_{n+1} + J_{n+1}$

8) On suppose dorénavant que $n=2$, l'espace E_2 est muni de la base $C_2=(c_0, c_1, c_2)$ où

$$c_i(x) = \frac{x^i}{i!} e^x$$

- Pour tout entier naturel k , calculer B^k
- Exprimer b_2 dans la base C_2
- En déduire la dérivée k -ième de la fonction b_2

1) Comme $0 = 0e^x$, on en déduit que $0 \in E_n$

Si $(f, g) \in E_n^2$, alors : $\exists (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tels que : $f(x) = P(x) e^x$ et $g(x) = Q(x) e^x$

Donc $f(x) + g(x) = (P(x) + Q(x)) e^x$ et $f + g \in E_n$

Soit $f \in E_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que : $f(x) = P(x) e^x$ et $\alpha f(x) = (\alpha P(x)) e^x$

Donc $\alpha f \in E_n$

2) Soit $f \in E_n$, $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que : $f(x) = P(x) e^x$, donc $f(x) = (a_0 + \dots + a_n x^n) e^x$

Et $f(x) = a_0 e^x + \dots + a_n x^n e^x$ ainsi $(b_0, \dots, b_n)$ est une famille génératrice de E_n

Montrons à présent que $(b_0, \dots, b_n)$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\alpha_0 b_0 + \dots + \alpha_n b_n = 0$

Alors $\alpha_0 + \dots + \alpha_n x^n = 0$ or $(1, X, \dots, X^n)$ est libre donc $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$

Et la famille est libre

$(b_0, \dots, b_n)$ est une base de E_n

3) On a $\dim(E_n) = \text{card} B = n+1$

4) L'opérateur de dérivation est linéaire

Soit $f \in E_n$, $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que : $f(x) = P(x) e^x$, donc $f(x) = (a_0 + \dots + a_n x^n) e^x$

Et $\partial(f) = \partial((a_0 + \dots + a_n x^n) e^x) = a_0 \partial(e^x) + \dots + a_n \partial(x^n e^x)$

Or $\forall k \in [0, n]$, $\partial(x^k e^x) = x^k e^x + k x^{k-1} e^x = (x^k + k x^{k-1}) e^x \in E_n$

Donc $\partial(f) \in E_n$

L'opérateur ∂ est un endomorphisme de E_n

5) On a $\partial(x^k e^x) = x^k e^x + k x^{k-1} e^x$ donc $\partial(b_k) = b_k + k b_{k-1}$

La matrice A est constituée d'une diagonale de 1 et d'une sur diagonale dont les coefficients vont de 1 à n

6) Comme $\det(A) = 1 \neq 0$, on en déduit que ∂ est un isomorphisme de E_n

7) Clairement $\partial(c_k) = c_k + c_{k-1}$ et la matrice est $I_{n+1} + J_{n+1}$

8) A) Par récurrence, $B^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k-1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $b_2 = 2c_2$

C) On a $\partial^k(b_2) = 2\partial^k(c_2)$ or $\partial^k(c_2) = \begin{pmatrix} 1 & k & k-1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

Et $\partial^k(b_2) = \begin{pmatrix} 2k-2 \\ 2k \\ 2 \end{pmatrix}$

Ainsi $\partial^k(b_2) = (2k-2)c_0 + 2kc_1 + 2c_2 = (x^2 + 2kx + 2k-2) e^x$

Problème n°19

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $f : E \rightarrow E$, $(x, y, z) \rightarrow (-y+z, -x+z, -x-y+2z)$

- Justifier que f est un endomorphisme de E .
- Donner une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$

- 3) Donner une base et la dimension de $\text{Im}(f)$, peut-on dire que f est un automorphisme de E ?
- 4) Démontrer que : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$
- 5) Soit $B=(u_1; u_2; u_3)$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $u_1 \in \text{Ker}(f)$. Déterminer la matrice de f dans B
- 6) Démontrer que f est un projecteur
- 7) Démontrer que f admet au moins une racine carrée, c'est-à-dire un endomorphisme g tel que $g^2=f$ (avec $g^2=g \circ g$)

1) Comme f est une combinaison linéaire des variables, il est clair que f est linéaire !

2) On a $(x,y,z) \in \text{Ker}(f)$ ssi $(-y+z, -x+z, -x-y+2z) = (0,0,0)$.

On résout le système et on obtient : $\text{ker}(f) = \text{vect}(1,1,1)$

Ainsi $\dim(\text{Ker}(f))=1$

3) L'application du théorème du rang assure que $\dim \text{Im}(f)=2$

On a $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$ ssi $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ -x+z \\ -x-y+2z \end{pmatrix} =$

$x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $\text{Im}(f) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où : $\text{Im}(f) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ les deux vecteurs étant bien linéairement

indépendants, on retrouve que $\dim \text{Im}(f)=2$

Comme $\text{rg}(f) \neq 3$, alors f n'est pas un automorphisme.

4) On a $\dim \text{Im}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

De plus, si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$ alors $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Et $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, la résolution donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

5) On a : $f(u_1)=(0,0,0)$ et $f(u_2) = (0,-1,-1) = u_2$ et $f(u_3)=(-1,0,-1)=u_3$

D'où $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) Un simple calcul donne $M^2=M$

7) Il suffit de considérer : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

Problème n°20

- 1) Montrer que l'équation $\text{sh}(x)=1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^\alpha \text{sh}^n(t) dt$
 - a) Déterminer le sens de variation de la suite I_n
 - b) Sans déterminer sa limite, démontrer que I_n est convergente.
 - c) A l'aide d'une IPP, montrer que pour tout entier naturel n :
 $(n+2)I_{n+2} = \text{ch}(\alpha) - (n+1)I_n$
 - d) En déduire la limite de I_n

- 1) La fonction $f : x \rightarrow sh(x)$ est croissante, de plus $sh(0)=0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} sh(x) = +\infty$, comme f est continue, on en déduit par le théorème de bijection, que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$
Ainsi, l'équation $sh(x)=1$ ne possède qu'une seule solution, notée α
- 2) A) On évalue le signe de $I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha sh^n(t)(sh(t) - 1)dt$
Or, sur $[0, \alpha]$, $(sh(t) - 1) \leq 0$, donc $sh^n(t)(sh(t) - 1) \leq 0$ et par croissance de l'intégrale, $\int_0^\alpha sh^n(t)(sh(t) - 1)dt \leq 0$, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$
On en conclut que (I_n) est décroissante.
B) Comme $I_n \geq 0$ (car sur $[0, \alpha]$, $sh(t) \geq 0$), alors la suite (I_n) est décroissante et minorée, par le théorème de convergence monotone, elle converge.
C) On a : $I_{n+2} = \int_0^\alpha sh^{n+2}(t)dt = \int_0^\alpha sh^n(t)(sh^2(t))dt = \int_0^\alpha sh^n(t)(ch^2(t) - 1)dt$
Donc $I_{n+2} = \int_0^\alpha sh^n(t)ch^2(t)dt - \int_0^\alpha sh^n(t)dt = \int_0^\alpha ch(t)(sh^n(t)ch(t))dt - I_n$
Calculons $\int_0^\alpha ch(t)(sh^n(t)ch(t))dt$ par IPP
On pose $u=ch(t)$ et $v'=(sh^n(t)ch(t))$, on obtient alors le résultat.
D) On a $\frac{n+2}{n+1}I_{n+2} = \frac{ch(\alpha)}{n+1} - I_n$
Soit L la limite de I_n , en passant à la limite : $L = -L$ donc $L=0$.

Problème n°21

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x + \ln(x)$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$.
 - 2) Dresser le tableau de variations de sa bijection réciproque f^{-1}
 - 3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$. On notera x_n cette unique solution.
 - 4) Montrer que : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer sa limite
 - 5) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n}$
 - 6) En déduire que : $x_n \sim n$ pour $n \rightarrow +\infty$
 - 7) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$
 - 8) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n)$
-
- 1) Comme f est la somme de deux fonctions strictement croissantes, on en déduit que f est strictement croissante $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$, de plus f est continue en tant que somme de deux fonctions continues, par le théorème de bijection f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$.
 - 2) On en déduit que f^{-1} existe et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
 - 3) En appliquant le théorème de bijection : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! x_n \in]0, +\infty[, f(x_n) = n$
 - 4) On a $x_{n+1} - x_n = f^{-1}(n+1) - f^{-1}(n)$ or $n+1 > n$ donc $x_{n+1} - x_n > 0$ et (x_n) croissante.
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \ln(x_n) = L + \ln(L)$ or $x_n + \ln(x_n) = n \rightarrow \infty$
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$
 - 5) De $x_n + \ln(x_n) = n$ on tire en divisant par x_n le résultat.
 - 6) De $1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x_n} = 1$

Donc $x_n \sim n$

7) Le quotient : $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{n} \times \frac{n}{x_n}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

8) De $x_n + \ln(x_n) = n$ et $x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = n + 1$ on tire $x_{n+1} - x_n + \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1$

Et par passage à la limite, sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$

Problème n°22

On considère $I =]0, 1[$ et $J =]1, +\infty[$

Pour $x \in I \cup J$, on pose $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ et $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$

- 1) Justifier que f est bien définie sur $I \cup J$
- 2) Justifier que f admet des primitives sur $I \cup J$, on appellera F cette primitive
- 3) Justifier que φ est bien définie sur I et sur J , préciser son signe sur I et sur J .
- 4) Justifier que φ est dérivable sur $I \cup J$ et que $\forall x \in I \cup J, \varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$
- 5) Déterminer les variations de φ sur I et sur J
- 6) Soit $x \in I \cup J$, on pose $\psi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$ (on admet que cette intégrale est bien définie)
Montrer que $x \in I \cup J, \psi(x) = \ln(2)$
- 7) Montrer que : $\forall x \in J, \frac{\varphi(x)}{x^2} \leq \psi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$
On admettra que : $\forall x \in I, \frac{\varphi(x)}{x} \leq \psi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x^2}$
- 8) En déduire un encadrement de φ sur J puis sur I
- 9) Démontrer que φ est prolongeable par continuité en 1. On appellera encore φ ce prolongement.
- 10) Démontrer que $\varphi(x) =_{x \rightarrow 1} \ln(2) + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$
- 11) En déduire que φ est dérivable en 1, donner une équation de sa tangente en ce point, et préciser la position de la tangente par rapport à la courbe représentative de φ

- 1) La fonction $\ln$ ne s'annule pas sur $I \cup J$ donc f est définie sur $I \cup J$
- 2) On a f continue sur $I \cup J$ car f est quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $I \cup J$
- 3) Comme f est continue sur $I \cup J$, alors f admet des primitives sur I et sur J
- 4) On a f continue, donc F dérivable (et même $\mathcal{C}^1$) or $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ par la relation de Chasles, et $\varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)}$
- 5) Sur I comme sur $J, \varphi'(x) \geq 0$ et φ croissante sur I et φ croissante sur J
- 6) Directement, $\psi(x) = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2)$
- 7) Sur $[x, x^2]$ avec $x > 1, \frac{1}{x^2 \ln(t)} \leq \frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{x \ln(t)}$, et par croissance de l'intégrale, on obtient directement le résultat.
- 8) Ainsi, sur $J : (\ln(2))x \leq \varphi(x) \leq (\ln(2))x^2$ et sur $I : (\ln(2))x^2 \leq \varphi(x) \leq (\ln(2))x$
- 9) De $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(2))x = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln(2))x^2 = \ln(2)$, on en tire que $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \ln(2)$
On peut donc prolonger φ par continuité en posant $\varphi(0) = \ln(2)$
- 10) On a $\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$, en posant $x = 1+h$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$

On obtient : $\varphi'(1+h) = 1 + \frac{h}{2} + o(h)$

On primitive : $\varphi(1+h) = \varphi(1) + h + \frac{h^2}{4} + o(h^2)$

Et $\varphi(x) = \ln(2) + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$

11) Le DL à l'ordre 2 en 1 de φ permet de justifier l'existence d'un DL à l'ordre 1 donc φ est dérivable en 1 et $\varphi'(1) = 1$

L'équation de la tangente est $y = \ln 2 + x - 1$

Et $\varphi(x) - (\ln(2) + (x-1)) \sim \frac{(x-1)^2}{4} > 0$ donc la courbe est localement au-dessus de la tangente.