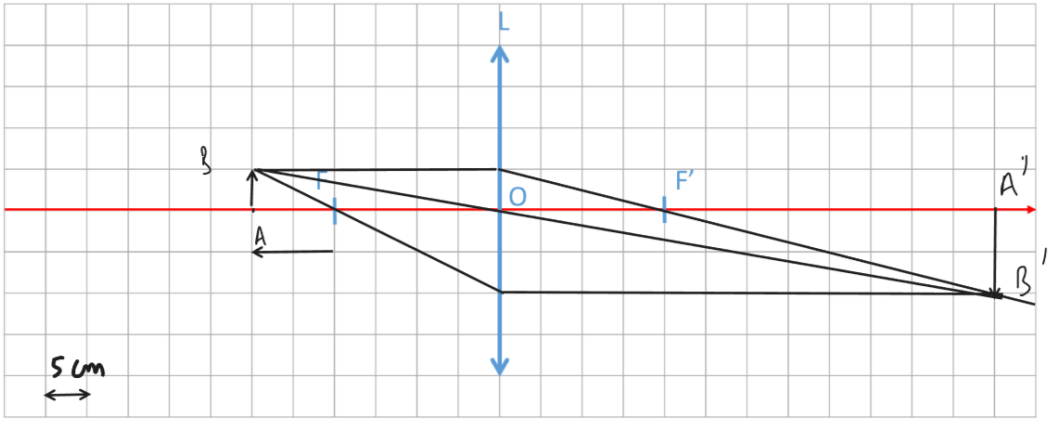
TD 2

Lentilles minces

Exercice 1 : Applications directes du cours

1. Lentille convergente et objet réel

Méthode graphique (construction d'image)



Par construction de l'image A'B' on obtient :

- $\overline{A'B'} = -10$ cm
- $\overline{OA'} = 60$ cm
- Image réelle : on doit placer un écran pour l'observer.

Relation de conjugaison avec origine aux foyers (Newton)

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

$$\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = +20 - 30 = -10 \text{ cm}$$

De ces deux équations nous déduisons :

$$\overline{F'A'} = \frac{-f'^2}{\overline{FA}} = 40 \text{ cm}$$

On en déduit :

$$\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = f' + \overline{F'A'} = 60 \text{ cm}$$

Pour déterminer $\overline{A'B'}$ on utilise les relations de grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -2$$

On a donc $\overline{A'B'} = -10$ cm

Les résultats obtenus sont bien les mêmes que par la méthode géométrique.

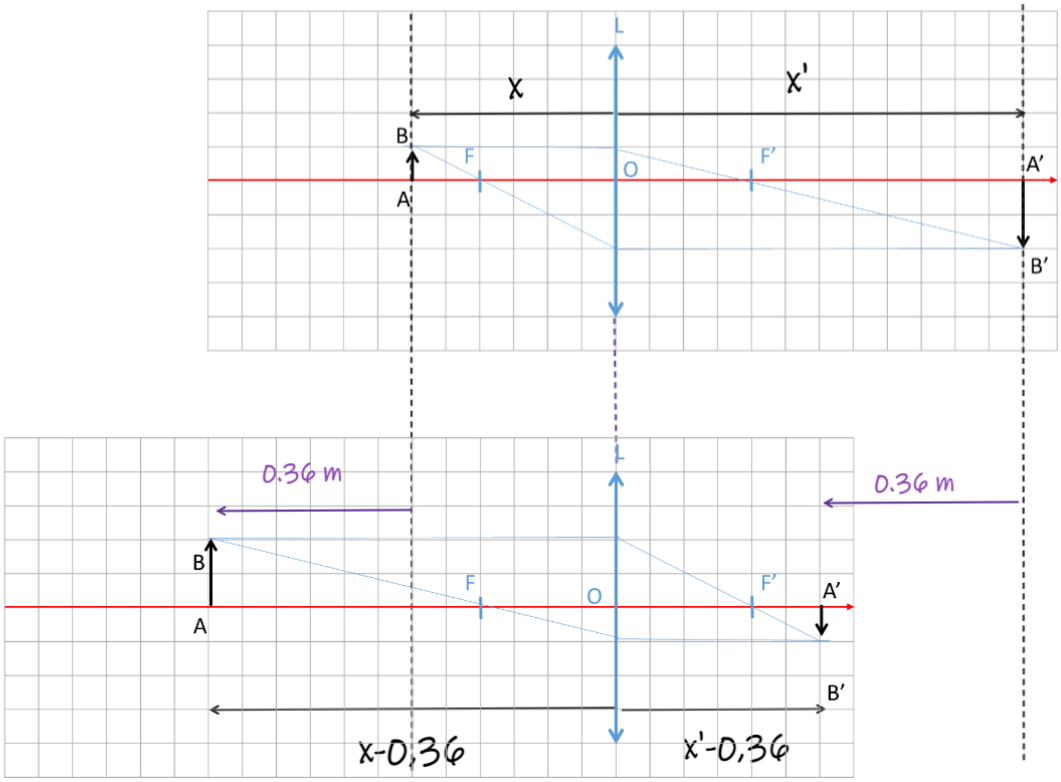
Relation de conjugaison avec origine au centre optique (Descartes)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Cette méthode est la plus rapide, elle conduit directement au résultat : $\overline{OA'} = 60$ cm

Le reste se traite comme précédemment.

2. Distance focale



On écrit d'abord les formules de grandissement dans les deux situations :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{x'}{x} = -2 \\ \gamma_2 = \dfrac{x' - 0.36}{x - 0.36} = -0.5 \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$\begin{cases} x = -0.36 \\ x' = 0{,}72 \end{cases}$$

Pour déterminer la distance focale de la lentille on utilise ensuite la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = 0{,}24$$

Une méthode plus élégante consiste à utiliser des considérations de symétrie, et à appliquer le principe du retour inverse. La deuxième situation est identique à la première en inversant la marche des rayons lumineux. On peut ainsi écrire :

$$-x = x' - 0.36$$

Soit :

$$x + x' = 0.36$$

On peut également exprimer f' directement en fonction de x en utilisant la relation de conjugaison et la relation de grandissement :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{x'} + \frac{2}{x'}$$

Soit

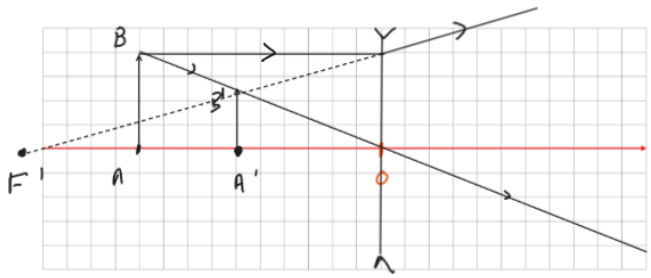
$$f' = \frac{x'}{3} = -\frac{2x}{3}$$

On a alors : $3f' - \frac{3}{2}f' = 0.36$ soit $f' = 0{,}24$

3. Position des foyers d'une lentille

objet réel à 5 cm
image virtuelle à 3 cm
1 carreau = 0,5 cm

$\overline{OF'} = f' = -7,5$ cm



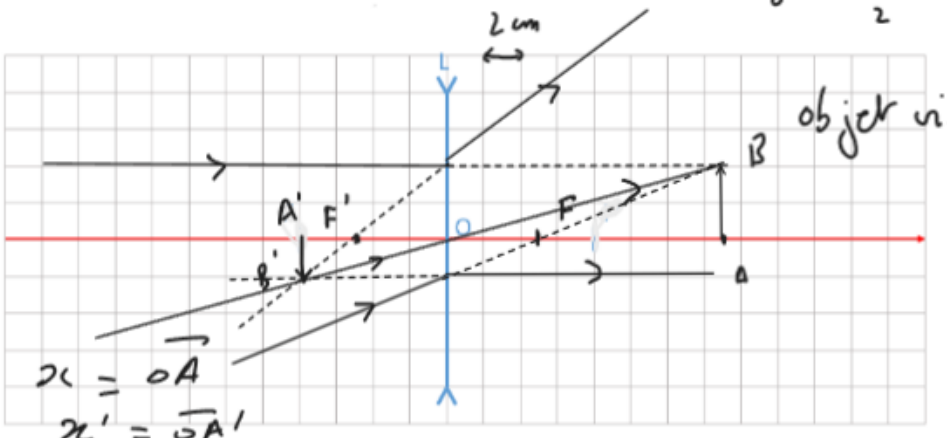
Relation de conjugaison en O :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$f' = \frac{1}{\frac{1}{-3} - \frac{1}{-5}} = \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}} = \frac{-15}{2} = -7,5 \text{ cm}$$

4. Conjugaison à grandissement fixé

$\gamma = -\frac{1}{2}$



$x = \overline{OA}$
$x' = \overline{OA'}$

$$\begin{cases} x' = -\frac{x}{2} \\ -\frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} = -\frac{3}{x} \end{cases}$$

$x = -3f'$
$= 15$ cm

On obtient donc également x'=-7,5 cm

5. Condition pour former l'image réelle d'un objet réel (démonstration à connaître)

$$\overline{AO} + \overline{OA_1} = D \Rightarrow \overline{OA_1} = D - \overline{AO} = D + \overline{OA} \quad (1)$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{-1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{-1}{\overline{OA}} + \frac{1}{D + \overline{OA}} \quad (2)$$

$$(D + \overline{OA})\,\overline{OA} = -f'(D + \overline{OA}) + f'\,\overline{OA} \quad (3)$$

(2) réduction au même dénominateur

les dénominateurs étant égaux, il y a égalité entre les numérateurs. on pose mesure algébrique de OA = x.

d'où en effectuant : $D\,x + x^2 = -f'\,D - f'\,x + f'\,x$

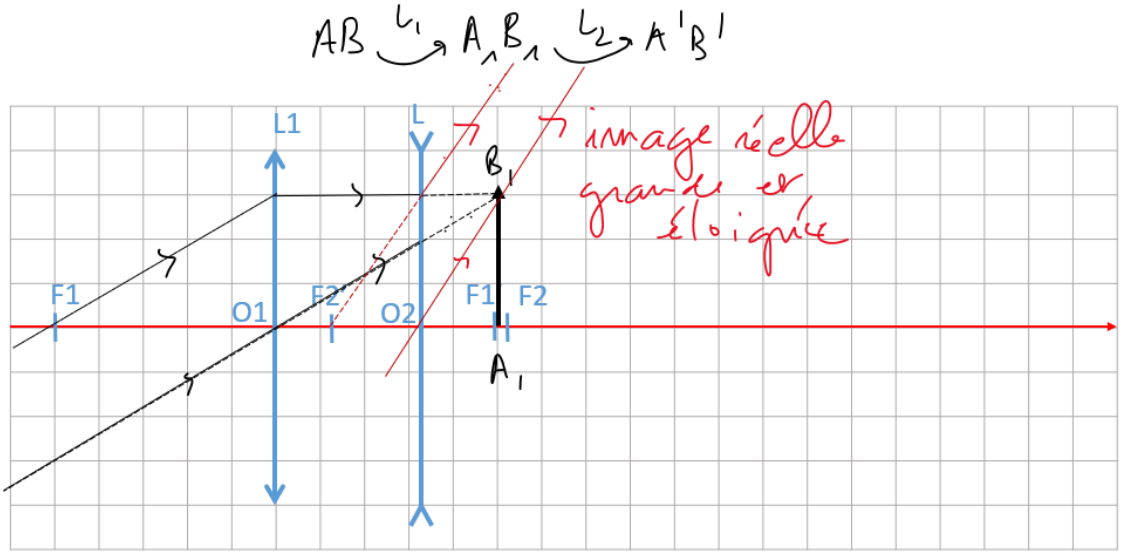
$x^2 + Dx + f'D = 0$

résoudre l'équation du second degré :

$\Delta = D^2 - 4f'D$

le discriminant est positif si $D > 4f'$

Exercice 2 : Objectif d'appareil photo



1. Le capteur se trouve nécessairement dans le plan focal image, lieu des images des objets situés à l'infini, donc à 75 mm de la lentille.
2. h = 324 m ; x=- 500 m >>f' donc on considère sans problème que l'image se forme bien sur le capteur.
   On utilise la relation de grandissement :
   h'/h=x'/|x|=0,075/500
   donc h' = 48,6 mm

3. L'image intermédiaire du monument, à l'infini, par L_1 se situe nécessairement dans le plan focal image de la lentille (donc la position est F1').
   Par le même raisonnement que précédemment on obtient : h1 = 64,8mm.

4. Image du monument par le système $\{L_1 + L_2\}$
   Position : formule de conjugaison (construction graphique facultative mais donnée à titre indicatif)

$$\frac{1}{\overline{O2A'}} - \frac{1}{\overline{O2A1}} = \frac{1}{f2'}$$

$\overline{O2A1} = \overline{O2O1} + \overline{O1F1'} = -6{,}5 + 10 = 3{,}5$ cm

Soit :

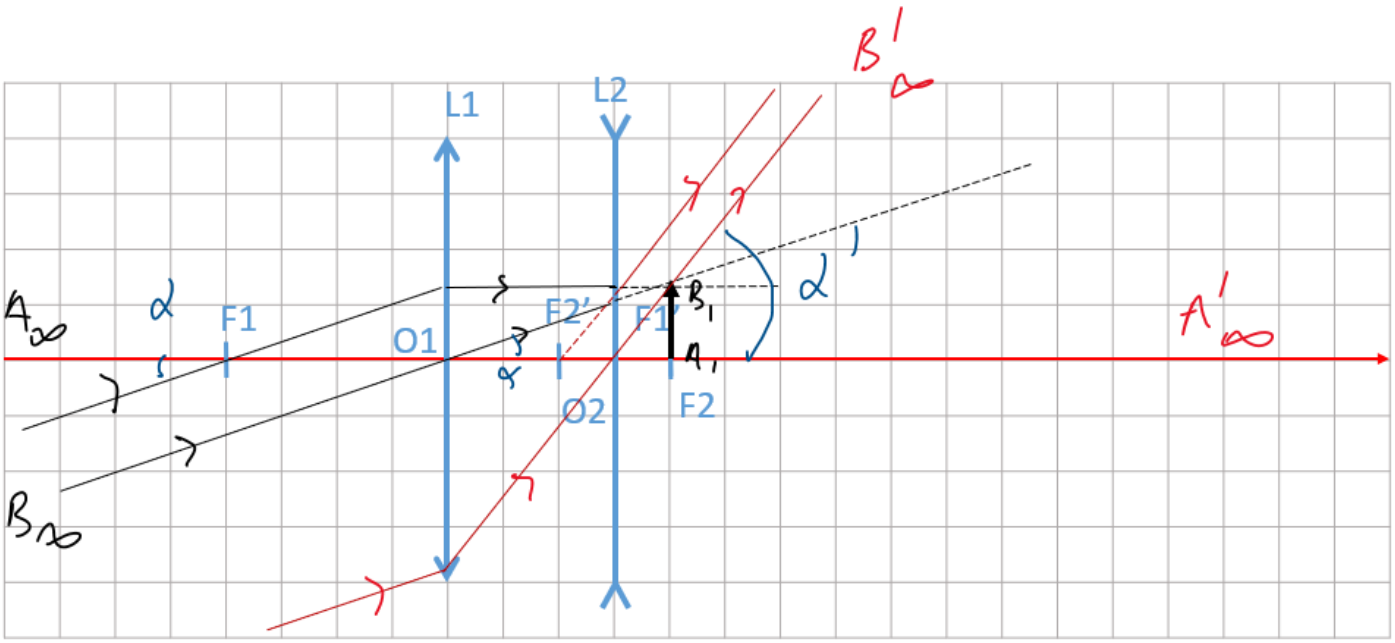
$\overline{O2A'} = 28$ cm

Taille : formule de grandissement : A'B' = -0,52m
L'image de la tour Eiffel au téléobjectif excède largement celle du capteur ; cela signifie qu'on ne photographiera qu'une partie du monument.

Distance entre l'extrémité du téléobjectif et le capteur : O1A' = 6,5 + 28 = 34,5 cm

5. Le grandissement de $\{L_1 + L_2\}$ est de -0,52/324 soit $-1.6.10^{-3}$. Avec une lentille unique on aurait donc une distance lentille-image $\overline{O3A'}$=$(-1.6.10^{-3}).(-500)$=0,8m. Cela correspond toujours au plan focal image de la lentille : f3'=80cm. L'encombrement est donc également de 80 cm, ce qui est beaucoup plus grand que le système à deux lentilles (plus du double).

Exercice 3 : Lunette astronomique



1. Le foyer image de la lentille L2 est placé à gauche de celle-ci : il s'agit d'une lentille divergente
2. $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F1'} + \overline{F1'O_2} = f1' + f2' = 0.15$
   On a donc f2'=0,15-f1'=-5cm .
3. Lorsqu'on observe un objet lointain (ce qui est le cas avec une lunette astronomique), on forme l'image sur le foyer image de la lentille L1, qui est le foyer objet de la lentille L2. L'image par le système $\{L_1 + L_2\}$ est donc renvoyée à l'infini. Cela permet une observation sans accommodation

   G = α' / α.

4. Pour déterminer les angles, on suppose que le système respecte les conditions de Gauss, et que les rayons sont donc paraxiaux. Dans ce cas, on est dans l'hypothèse des petits angles et on peut assimiler la tangente de l'angle à l'angle lui-même. Cela donne :
   Dans le triangle O1A1B1 : α=A1B1/f1'
   Dans le triangle O2A1B1 : α'=A1B1/|f2'|

   Par conséquent : G = f1' / |f2'| =20/5=4

5. Résolution de l'œil : 1 minute d'arc = 1/60=0,017°

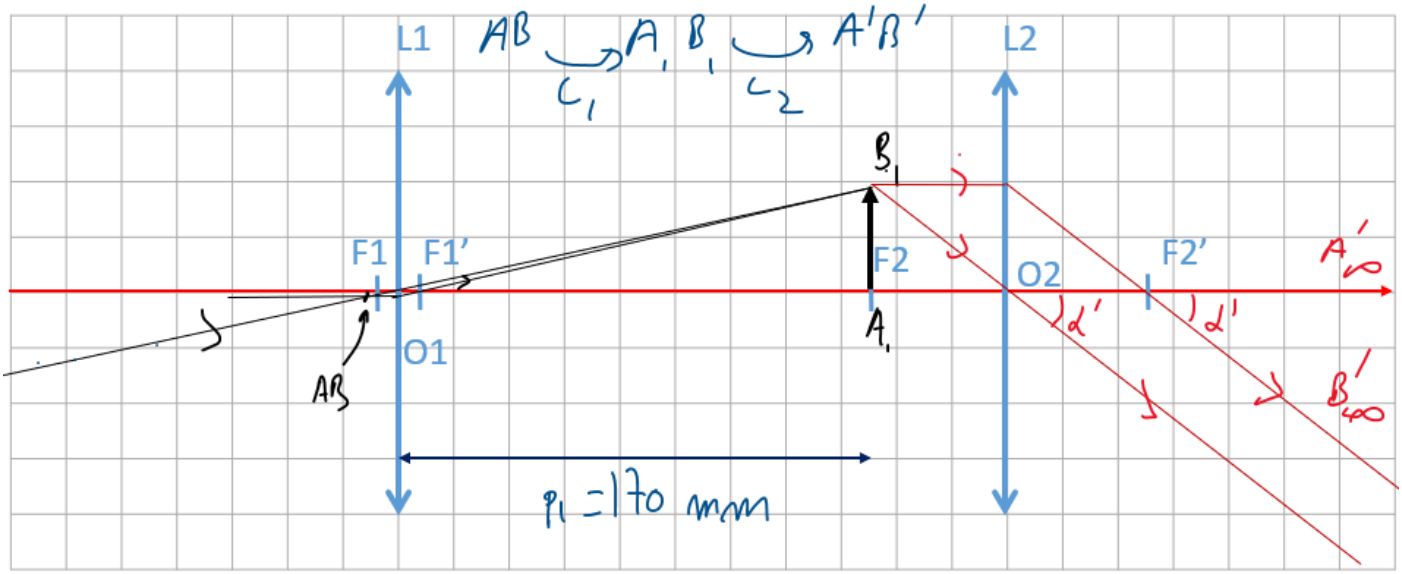
$d_{TL} = 3{,}8.10^5$ km

Diam Copernic : 96 km ; α = 96 / 3,8.10^5 = 0,014° (**attention à la conversion des radians en degrés !!**) donc non visible à l'œil nu

Diam Clavius : 240 km ; α = 240 / 3,8.10^5 = 0,036° donc visible à l'œil nu

6. On utilise le grossissement :
   Copernic : α'=4*α = 0,058° donc visible avec la lunette
   Clavius : α'=4*α = 0,14° donc visible avec la lunette (normal puisqu'on le voyait déjà à l'œil nu !)

Exercice 4 : Microscope



Puissance : P = α' / AB
Grossissement : G = α' / α (α : angle sous lequel on voit AB à l'œil nu au PP).

1. Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O1A1}} - \frac{1}{\overline{O1A}} = \frac{1}{f1'}$$

   Soit :

$$\frac{1}{p1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f1'}$$

   Soit p=6,2mm
   Formule de grandissement : γ_1=-p1/p=-27,33

2. P = α' / AB = (α' / A1B1) * (A1B1 / AB) = P2 * $|\gamma_1|$
   Or, dans les conditions de Gauss on a : α' = A1B1/f2' soit P2=1/f2'
   Donc : P = $|\gamma_1|$/f2' = 27,33/0,05 = 547 m-1

3. G = α' / α = (A1B1 / f2') / (AB / PP) = $|\gamma_1|$*PP/f2' = 137

4. La résolution de l'œil étant d'une minute d'arc on calcule AB pour α'=0,017°=3.10^{-4} rad.
   AB = α'/P = 5,3.10^{-7} m.

Exercice 5 : Corrections de l'œil

1. Domaine de variation de la vergence d'un œil emmétrope :
   Accomodation à l'infini : de manière évidente f'=15mm soit v=67 δ
   Accomodation au PP : on applique la formule de conjugaison avec origine au centre

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\overline{OA'} = 15 \text{ mm}$$
$$\overline{OA} = -250 \text{ mm}$$

   Le calcul donne :
   f'=14,15 mm soit v = 71 δ

2. Œil myope : $\overline{OA'} = 15{,}2 \text{ mm}$
   On suppose que les vergences demeurent les mêmes au PP et au PR que pour l'œil emmetrope. Avec la formule de conjugaison on peut ainsi en déduire $\overline{OA}$, dont l'opposé de la valeur recherchée :

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'}$$

   PP = 20 cm
   PR = 1,1 m

   Pour rétablir le PR à l'infini il faudrait une vergence de 1/0.0152 = 66 δ au lieu de 67 δ. Il faudrait donc une lentille de contact de -1 δ (lentille divergente).

3. Un œil hypermétrope : $\overline{OA'} = 14{,}8 \text{ mm}$
   Même raisonnement que précédemment :

   PP = 32 cm
   PR = -1,1 m

   La seconde valeur peut paraître aberrante ; en effet, si l'œil n'accommode pas, l'image se forme à 15 mm de la lentille, donc derrière la rétine. En réalité l'œil devra toujours accommoder, très légèrement pour voir loin donc on peut considérer que le PR est toujours à l'infini, comme pour l'œil emmetrope.

   L'œil hypermétrope aura donc des difficultés à voir des objets placés trop près … La correction doit donc se faire au PP : pour le ramener à 25 cm il est nécessaire qu'il converge plus, donc on utilise une lentille convergente.

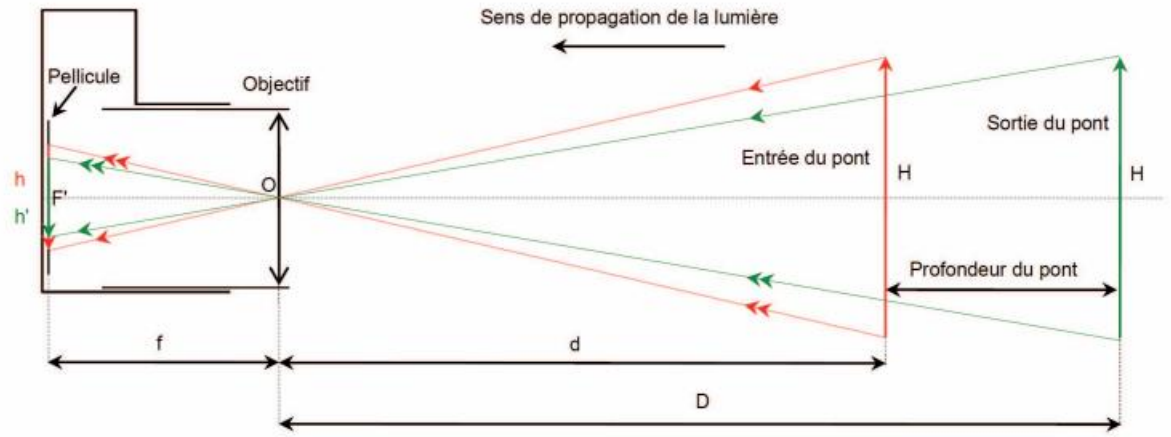
   Pour avoir le PP à 25 cm on doit avoir une vergence de 72 δ au lieu de 71 δ. Il faut donc une lentille convergente de 1 δ.

4. Résolution de l'œil emmétrope : 1 minute d'arc soit 0,017° ou encore 3.10^{-4} rad.
   AB = 2,0 mm
   $\alpha = 3.10^{-4}$ rad

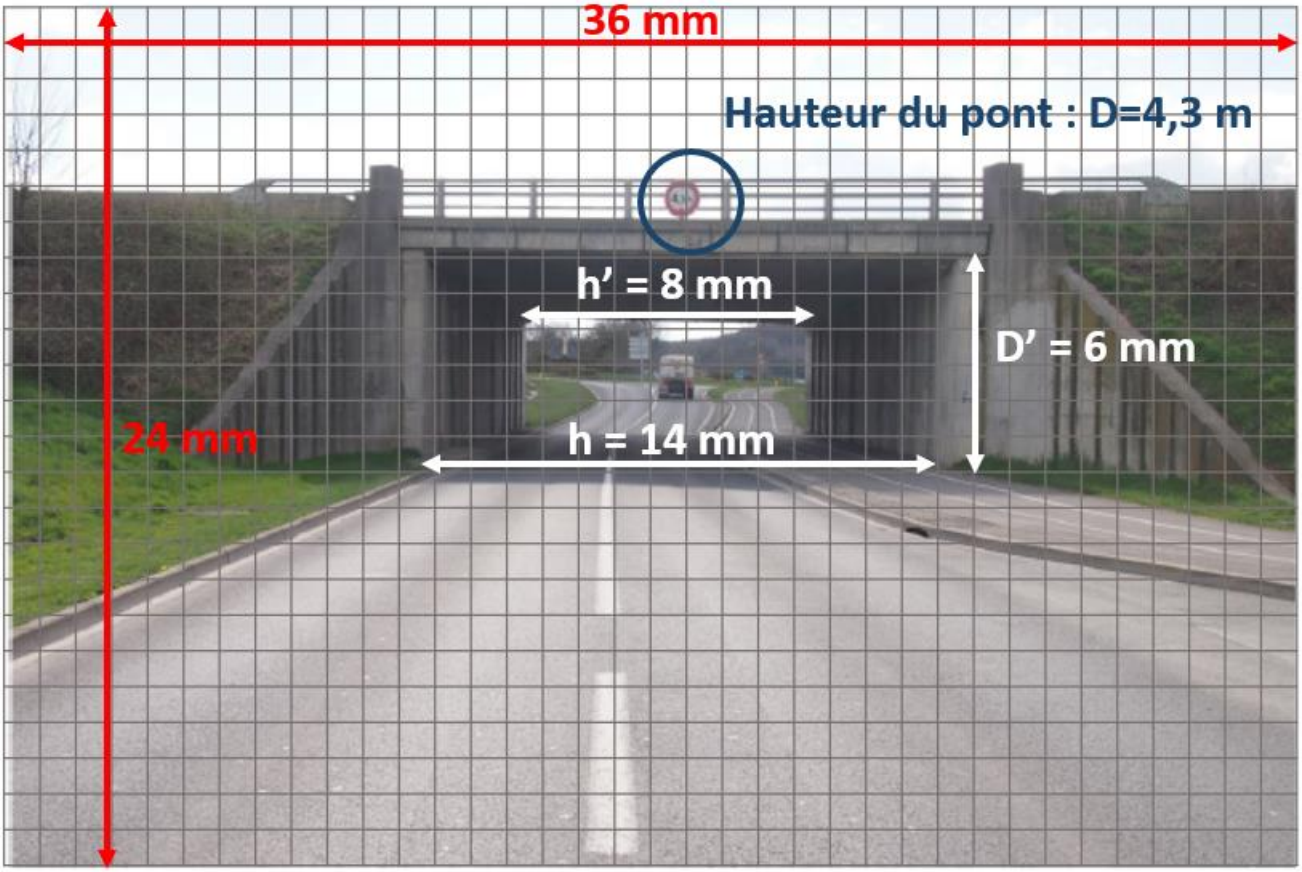
   La distance minimale pour distinguer les deux traits est donc (dans l'hypothèse des petits angles, ici largement justifiée) : d = AB / tanα ≈ AB/ α = 6,67 m.

Exercice 5 : Estimation de la largeur d'un pont

Schéma :



Mesures sur la photo (24*36 mm) :



La question est de déterminer la profondeur du pont, soit la distance D-d.

Comme l'énoncé le suggère, on peut supposer que l'image ci-dessus est formée dans le plan focal de la lentille soit à 35 mm de celle-ci (distance f = 35 mm).

Voici l'idée à suivre pour la résolution : à partir des formules de grandissement, si on connaît h/H et h'/H on peut en déduire f/d et f/D ce qui conduira au résultat.

h et h' sont connus : on peut les mesurer sur la photo ! Par contre H reste à déterminer. Pour cela nous allons utiliser une autre mesure connue : la hauteur du pont, indiquée sur le panneau vaut D = 4,3 m. Si on se place à l'entrée du pont le grandissement sera D'/D = 0,006 / 4,3 = 0,0014.

Etant situé à la même distance de l'objectif, on a donc que h/H = 0,0014 soit H=10 m.

On a donc :

f/d = h/H soit d = 25 m

Par ailleurs f/D =h'/H soit D =44 m.

Par différence on obtient le résultat voulu : p = D-d = 19 m.