

Réduction des endomorphismes

Dans ce chapitre, E désigne, sauf mention du contraire, un espace vectoriel de dimension quelconque sur un corps K désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Malgré tout, beaucoup des exercices traités et des théorèmes abordés le seront dans le cadre de la dimension finie.

I. Sous-espaces stables

1) Définition

Soit u un endomorphisme de E , un sous-espace F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$

On peut alors définir la restriction de u à F , appelé endomorphisme induit par u sur F , notée $u_F : F \rightarrow F$, $u_F(x) = u(x)$

Remarque : Si D est une droite stable par u , alors l'endomorphisme induit par u sur D est une homothétie.

Exemple :

Pour tout endomorphisme u , $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u .

Exercice : Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Démonstration : II. 3) a)...

2) Proposition

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E .

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension r .

-Si F stable par u alors si b est une base de E adaptée à F , la matrice de u dans la base b est de la forme : $\text{Mat}_b(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(K)$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(K)$

-Réciproquement, s'il existe une base b de E adaptée à F , dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(K)$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(K)$, alors F est stable par u .

3) Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E

Soit $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base fixée de E .

La matrice de u dans la base e est diagonale si et seulement si chaque droite vectorielle Ke_i est stable par u .

Exemple : Tout projecteur p et toute symétrie $s = 2p - \text{Id}_E$ a une matrice diagonale dans une base adaptée à $E = \text{Im} p \oplus \text{Ker} p$

4) Proposition

Soit : $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $D \in \mathcal{M}_p(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, alors $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$

Démonstration :

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

On développe $\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ par rapport à la première ligne et on obtient $\det(D)$

On développe $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ par rapport à la dernière ligne et on obtient $\det(A)$

5) Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E ,

Soit $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base fixée de E .

La matrice de u relative à la base e est triangulaire supérieure si et seulement si chacun des sous-espaces $\text{vect}(e_1, \dots, e_i)$, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ est stable par u .

II. Éléments propres

1) Éléments propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

a) Définitions :

On dit que $\lambda \in K$ est **valeur propre** de u s'il existe un vecteur **non nul** x de E , tel que $u(x) = \lambda x$

On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ , s'il est **non nul**, et vérifie $u(x) = \lambda x$

Si $\lambda \in K$ est valeur propre de u , on appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ , et noté $E_\lambda(u)$, l'ensemble $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$

b) Remarques

Un vecteur propre n'est associé qu'à une seule valeur propre.

$E_\lambda(u)$ est non réduit à $\{0\}$ si, et seulement si λ est valeur propre de u .

Lien avec le noyau : u admet 0 comme valeur propre si et seulement si u n'est pas injectif. De plus $E_0(u) = \text{Ker}(u)$

En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u , appelé spectre de u , se note : $\text{Sp}(u)$

Chercher les éléments propres d'un endomorphisme revient à en déterminer le spectre et les espaces propres correspondants.

c) Une question importante : Un endomorphisme admet-il toujours une valeur propre ?

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, défini par $u(P) = XP$

Montrer que $\forall \lambda \in K$, l'égalité $XP = \lambda P$ est impossible

Répondre à la question initiale...

2) Exemples d'éléments propres pour des endomorphismes « remarquables »

a) Homothétie

Tout vecteur non nul est vecteur propre de l'homothétie λId pour la valeur propre λ .

Cette homothétie admet λ comme unique valeur propre

b) Projecteur

De façon générale, tout sous espace propre associé à une valeur propre non nulle est incluse dans $\text{Im}(u)$

En effet : si $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$, alors $x = u(\frac{x}{\lambda}) \in \text{Im}(u)$

Ainsi si λ désigne une valeur propre non nulle d'un projecteur p , alors

$$E_\lambda(p) \subset \text{Im}(p)$$

Or la restriction de p à $\text{Im}(p)$ est l'identité, donc $\lambda = 1$

Il ne peut donc y avoir que deux valeurs propres possibles 1 et 0.

On vérifie que $E_0(p) = \text{Ker}(p)$ et $E_1(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Im}(p)$

3) Propriétés

a) Proposition 1

Si deux endomorphismes commutent, les sous espaces propres de l'un sont conservés par l'autre.

Démonstration :

Soit λ une valeur propre de u ,

Soit $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$, montrons que $v(x) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$

On a $u(v(x)) = v(u(x))$ car u et v commutent.

Or $v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $u(v(x)) - \lambda v(x) = 0$ soit $v(x) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$

b) Proposition 2

Si F est un sous-espace propre de E stable par u (c'est-à-dire $u(F) \subset F$), alors les valeurs propres de l'endomorphisme induit par u sur F , noté u_F sont les valeurs propres de u telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$

On a alors : $E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F$

Remarque : On a ainsi : $\text{Sp}(u_F) \subset \text{Sp}(u)$

c) Proposition 3 :

Si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille finie de valeurs propres de u , deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_i}(u)$, $i \in I$, sont en somme directe.

Démonstration :

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de p vecteurs propres de u , deux à deux distinctes

Montrons par récurrence que les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_i}(u)$, $i \in I$, sont en somme directe.

Initialisation : pour $p=1$, c'est évident !

Hérédité : On suppose le résultat vrai jusqu'au rang p .

Soit $(\lambda_0 ; \lambda_1 ; \dots ; \lambda_p)$ $p+1$ valeurs propres 2 à 2 distinctes

Soit $(x_0; x_1; \dots; x_p) \in E_{\lambda_0} \times \dots \times E_{\lambda_p}$ tel que $x_0 + \dots + x_p = 0$

En appliquant u , on obtient $u(x_0 + \dots + x_p) = u(0) = 0$ or $u(x_0 + \dots +$

$x_p) = u(x_0) + \dots + u(x_p) = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_p x_p = 0$

De : $\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \lambda_0) x_i = \sum_{i=0}^p (\lambda_i - \lambda_0) x_i = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i - \lambda_0 \sum_{i=0}^p x_i = 0$

Or en appliquant l'hypothèse de récurrence pour $E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_p}$, on obtient que $E_{\lambda_1}, \dots$ et E_{λ_p} sont en somme directe.

D'où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (\lambda_i - \lambda_0) x_i = 0$ or $\lambda_i \neq \lambda_0$ donc $x_i = 0$

De plus, $x_0 + \dots + x_p = 0$ donc $x_0 = 0$

Finalement $x_0 = x_1 = \dots = x_p = 0$

Et, les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_i}(u)$, $i \in I$, sont en somme directe.

Corollaire : Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

4) Cas de la dimension finie

a) Proposition 1 :

Si E est de dimension finie et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u , deux à deux distinctes, alors : $\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq \dim(E)$

Démonstration : Evident puisque les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe !

b) Proposition 2 :

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n , a au plus n éléments.

Démonstration : Une famille libre maximale est donc de dimension finie n . Or toute famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes est libre, donc de rang inférieur à n .

5) Eléments propres d'une matrice

a) Eléments propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$,

On dit que $\lambda \in K$ est **valeur propre** de A s'il existe $X \in K^n$, non nul, tel que $AX = \lambda X$

On dit que $X \in K^n$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ , s'il est non nul, et vérifie $AX = \lambda X$

Si $\lambda \in K$ est valeur propre de u , on appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ , et noté $E_{\lambda}(u)$, l'ensemble $\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}_n) = \{X \in K^n, AX = \lambda X\}$

b) Remarques :

Le scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible.

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors A admet au plus n valeurs propres.

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, triangulaire supérieure, montrer que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux.

En effet, soit $\lambda \in K$, $A - \lambda I_n$ est une matrice triangulaire dont la diagonale est $a_{11} - \lambda, \dots, a_{nn} - \lambda$, dont le déterminant est $(a_{11} - \lambda) \times \dots \times (a_{nn} - \lambda)$ inversible ssi $a_{ii} - \lambda \neq 0$

c) Proposition

Soit A une matrice représentant un endomorphisme u dans une base $B = (e_1, \dots, e_n)$

On a alors $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$:

$$\text{On a : } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$$

Remarque: On a $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$ mais $E_\lambda(u) \neq E_\lambda(A)$, en effet $E_\lambda(u) \subset E$ et $E_\lambda(u) \subset \mathcal{M}_{n,1}(K)$

d) Corollaire

Deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

Démonstration : En réalité, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme !

e) Etude d'un exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

On a $\det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + 1$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$

III. Polynômes caractéristiques

1) Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$

a) Proposition

Il existe un unique polynôme, appelé polynôme caractéristique de A , et noté χ_A tel que : $\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$

Remarque : Si A est une matrice réelle, alors le polynôme caractéristique de A est identique, que l'on voit A comme une matrice réelle ou complexe.

b) Proposition

On a : $\chi_A = \chi_{A^T}$

Démonstration : Il suffit de se souvenir qu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

c) Proposition

On a le développement partiel suivant (appelé parfois petit théorème de Cayley-Hamilton) ;

$$\chi_A = X^n - (\text{tr}A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Corollaire : Ainsi, pour $A \in \mathcal{M}_2(K)$, $\chi_A = X^2 - (\text{tr}A)X + \det(A)$

Démonstration : Par récurrence sur n , avec la convention qu'un déterminant de taille nulle vaut 1.

Application (Oral PC ENS 2024)

$$\text{Soit } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'équation $A^2 + A = J$ (ind. Procéder en analyse-synthèse. On utilisera $\chi_A = X^2 - (\text{tr}A)X + \det(A)$ et on admettra le « grand » théorème de Cayley-Hamilton permettant d'affirmer que $\chi_A(A) = 0$)

d) Proposition

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration :

$$\text{On a : } \chi_{P^{-1}AP}(X) = \det(XI_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(XI_n - A) \det(P) = \det(XI_n - A) \det(P^{-1}) \det(P) = \det(XI_n - A)$$

2) Exemple de calcul

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \text{ déterminer le polynôme caractéristique de } A.$$

3) Polynôme caractéristique et spectre

a) Proposition :

Un scalaire $\lambda \in K$, est une valeur propre de A si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique de A

$$\text{b) Exemple : Déterminer les éléments propres de } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

c) Remarque :

Nous avons vu qu'en dimension quelconque un endomorphisme n'a pas forcément de valeur propre.

Nous avons vu qu'en dimension finie n , un endomorphisme a au plus n valeurs propres distinctes.

Nous pouvons préciser que sur $\mathbb{C}$, un endomorphisme a au moins une valeur propre (par application du théorème de d'Alembert-Gauss).

Et sur $\mathbb{R}$, avec n impair, un endomorphisme a au moins une valeur propre (par application du théorème des valeurs intermédiaires).

4) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On suppose ici E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$

a) Définition

On appelle polynôme caractéristique de u , l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = \det(\lambda Id_E - u)$$

Remarques :

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme correspond à celui de la matrice correspondante exprimée dans n'importe quelle base.

La notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme n'a aucun sens si E n'est pas de dimension finie.

b) Proposition

Un scalaire $\lambda \in K$, est une valeur propre de u si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique de u .

Démonstration :

Par définition, λ valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas inversible, c'est-à-dire : $\det(\lambda Id_E - u) = 0$

5) Ordre de multiplicité d'une valeur propre

On suppose ici E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$

a) Définition

On appelle ordre de multiplicité d'une valeur λ de u , son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de u (De la même façon, on définit l'ordre de multiplicité des valeurs propres d'une matrice)

Remarque : On parle de valeur propre simple, double, triple etc. si c'est une racine simple, double, triple etc. du polynôme caractéristique.

On note $m(\lambda)$ la multiplicité de λ

b) Proposition

Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a : $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$

Corollaire : Si λ est valeur propre simple de u alors $\dim(E_\lambda(u)) = 1$

Démonstration

Soit $n(\lambda) = \dim(E_\lambda(u))$

Comme $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ alors : $1 \leq \dim(E_\lambda(u))$

De plus, $E_\lambda(u)$ est stable par u , on peut définir la restriction de u à $E_\lambda(u)$

Or cette restriction est l'homothétie $\lambda Id_{E_\lambda(u)}$, et son polynôme caractéristique est donc $(X - \lambda)^{n(\lambda)}$, et il divise le polynôme caractéristique de u , donc $n(\lambda) \leq m(\lambda)$

c) Remarque

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de u , alors :

$\chi_u = Q \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)}$ où $Q \in K[X]$ n'a pas de racine dans K .

IV. Diagonalisation

Dans ce paragraphe, E est de dimension finie.

1) Définition

L'endomorphisme u est dit diagonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice représentative de u est diagonale.

Une matrice A est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, en d'autres termes, s'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$

Dans la mesure où la restriction de l'endomorphisme à un espace propre donne une homothétie vectorielle, le problème de diagonalisation revient à tenter de déterminer les éléments propres de l'endomorphisme.

2) Proposition

Soit u un endomorphisme de E , et A une matrice représentant u , alors u est diagonalisable si et seulement si A l'est.

3) Terminologie et exemple

Diagonaliser un endomorphisme u ou une matrice A , c'est déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale ou déterminer une matrice semblable à A et diagonale.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer une base de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle la matrice représentative de A soit diagonale (en d'autres termes, diagonaliser A ...)

4) Premières propriétés pour démontrer le caractère diagonalisable d'un endomorphisme ou d'une matrice

a) **Si E est de dimension n , et si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable (et chaque sous-espace propre est de dimension 1)**

Remarque : Il ne s'agit que d'une condition suffisante et non nécessaire !

Exemple : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exemple n°2 : Montrer que $B = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Le raisonnement de l'exemple n°2 est très commode pour démontrer qu'un endomorphisme ne possédant qu'une seule valeur propre n'est pas diagonalisable !

b) Proposition :

L'endomorphisme u est diagonalisable $\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in Sp(E)} E_{\lambda}(u) = E \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(E)} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E)$

A est diagonalisable $\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in Sp(E)} E_{\lambda}(u) = K^n \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(E)} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que A est diagonalisable.

5) Diagonalisation et polynôme caractéristique

a) Proposition :

Si le polynôme caractéristique de u (resp. A) est scindé à racines simples, alors u (resp. A) est diagonalisable

Remarque : Il s'agit d'une condition suffisante

Démonstration :

Supposons que u admette n valeurs propres distinctes $\lambda_1 ; \dots ; \lambda_n$

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\exists e_i \in E_{\lambda_i}$,

Clairement $(e_1 ; \dots ; e_n)$ sont linéairement indépendants donc forment une base de E (puisque $\dim(E)=n$)

Or les espaces propres sont en somme directe, donc $n \leq \sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}) \leq \dim(E) = n$

Donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, E_{λ_i} est une droite vectorielle.

b) Proposition

Pour que u soit diagonalisable il faut et il suffit que : u vérifie deux conditions :

C1 : Le polynôme caractéristique de u est scindé sur K

C2 : Pour toute valeur propre de u , la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de cette valeur propre : $\forall \lambda \in$

$Sp(u)$, $\dim E_{\lambda}(u) = m(\lambda)$

Remarque : Le résultat reste le même pour les matrices...

Remarque : Ainsi si le polynôme caractéristique n'est pas scindé, alors l'endomorphisme n'est pas diagonalisable !

Remarque : L'étude du polynôme caractéristique ne permet donc pas, en général, de conclure quant au caractère diagonalisable d'un endomorphisme (sauf dans le cas où le polynôme est scindé à racines simples...), d'où l'intérêt d'étudier une autre catégorie de polynômes...les polynômes annulateurs.

Démonstration :

Soit $\chi_u = Q \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ avec Q sans racine sur K

On a : $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_{\lambda}(u) \leq \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda) = \dim(E) - \deg(Q)$

Or u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_{\lambda}(u) = \dim(E)$

Donc $\deg(Q)=0$ et $\dim E_{\lambda}(u) = m(\lambda)$

V. Applications

1) Calcul de puissances

$$\text{On donne } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A

Construire la matrice de passage P permettant d'écrire que $A = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale
Calculer A^n pour n entier naturel donné

Le polynôme caractéristique est $(X-1)(X-2)(X+4)$

Il reste à écrire $A = PDP^{-1}$

Et constater que $A^n = PD^nP^{-1}$

2) Résolution de système ou de suites récurrentes.

Déterminer les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n + 5w_n \end{cases}$$

On construit la matrice correspondante au système et son polynôme caractéristique est : $x(x-2)(x-1)$

On obtient les vecteurs propres : $(-4, 3, 2)$; $(-4, 0, 1)$ et $(2, 1, 0)$

On construit la matrice de passage P ...

3) Résolution de systèmes d'équations différentielles

a) Exemple n°1

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$

Le polynôme caractéristique est : $(x-2)(x-3)$

Des vecteurs propres possibles : $(1, 1)$ et $(2, 1)$

On construit la matrice de passage P ...

b) Exemple n°2

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$

Le polynôme caractéristique est : $(x-5)(x+3)$

Des vecteurs propres possibles : $(1, 2)$ et $(-2, 1)$

On construit la matrice de passage P ...