

Colle sur le chapitre n°3**« Les complexes (1) »****En vrac : Vrai ou faux ?**

- 1) Deux complexes dont la somme et le produit sont réels, sont réels.
- 2) Les racines carrées de i sont : $\sqrt{i}$ et $-\sqrt{i}$
- 3) Le nombre complexe 0 est de module et d'argument nuls
- 4) L'équation $e^z = -1$ implique que $z = i\pi$
- 5) On a : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, a + ib = 0 \Rightarrow a = b = 0$

Exercice n°1

- 1) a) Donner la forme trigonométrique de $1+i$
b) En déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 2) Donner les parties réelle et imaginaire de $z = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

Exercice n°2

On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$

- 1) Montrer qu'il existe un unique réel x , à déterminer, solution de l'équation précédente.
- 2) Déterminer des complexes α et β tels que :
 $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = (z-x)(z^2 + \alpha z + \beta)$
- 3) En déduire la résolution de $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$

Exercice n°3

Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kx)$

Exercice n°4

- 1) Résoudre de deux façons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- 2) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

Problème:

Le but du problème est le calcul de la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

On considère l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$

- 1) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$, en calculant les racines sous forme exponentielle
- 2) En déduire les solutions de (E) sous forme trigonométrique
- 3) On va chercher à présent à exprimer les solutions de (E) à l'aide de racines carrées.
 - a) Justifier l'existence d'un polynôme Q tel que pour tout z de $\mathbb{C}$, $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$
 - b) Déterminer la fonction Q précédente
 - c) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout complexe z non nul,
 $\frac{Q(z)}{z^2} = a(z + \frac{1}{z})^2 + b(z + \frac{1}{z}) + c$
 - d) Résoudre l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ à l'aide de racines carrées.
 - e) En déduire la résolution de l'équation $Q(z) = 0$ à l'aide de racines carrées.
 - f) Donner la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$