Colle sur le chapitre n°4 « Fonctions usuelles »

En vrac : Vrai ou faux ?

1) La fonction Arcos est définie sur $[0,\pi]$
2) La fonction Arcos est paire
3) $\text{Arctan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$
4) La fonction sh est bijective
5) On a $\cos(\text{Arcos}(\frac{1}{5})) = \frac{1}{5}$
6) On a $\text{Arcos}(\cos(\frac{\pi}{9}))= \frac{\pi}{9}$

Exercice n°1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x \ln(1+\frac{1}{x})$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$
3) Justifier que : $\lim\limits_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ et en déduire les limites de f en $\pm\infty$
4) Etudier les variations de f sur $]-\infty, -1[$ (on aura peut-être besoin de f '')

Exercice n°2

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose t=arctan(sh(x)), calculer tan(t), cos(t) et sin(t) en fonction de x.

Exercice n°3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de f.
3) Préciser les valeurs de f(0), f(1), $f(\sqrt{3})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4) Montrer que f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et préciser sa dérivée
5) Pour x>1, donner une expression de f(x) en fonction de arctan

Exercice n°4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \frac{2x}{1+x^2}$

1) f est-elle injective ?
2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$
3) f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur [-1 ;1] ?

Problème:

On considère la fonction f définie par : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, telle que f(x,y) = (3x-5y ;x-2y)

1) Montrer que f est injective
2) Montrer que f est surjective
3) Justifier l'existence de la réciproque de f, notée f^{-1}, et donner l'expression de cette réciproque.