Feuille d'exercices sur réduction d'endomorphismes

Exercice n°1 (Edhec)

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$\varphi(M) = M + {}^tM$$

1) ***a.*** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Écrire la matrice A de φ dans $\mathscr{B}$.

c. En déduire que φ est diagonalisable et non bijectif.

2) Calculer A^2 et en déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $A^n = 2^{n-1} A$.

3) ***a.*** Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(E_1,\ E_2 + E_3,\ E_4)$.
Établir alors : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3$.

b. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

c. Établir que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 2.

d. Donner, pour résumer, les valeurs propres de φ ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Exercice n°2

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite pseudo-magique s'il existe un réel S(A) tel que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} =$ S(A)

Soit E l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \ .)$
2) Montrer que A est pseudo-magique si et seulement s'il existe un réel μ tel que AJ=JA= μJ
3) Soit A une matrice de E inversible, montrer que S(A)≠0, montrer que A^{-1} appartient à E. Que vaut S(A^{-1}) ?
4) Soit A une matrice de E, montrer que S(A) est une valeur propre de A.

Exercice n°3 (oraux de concours)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{rg}(A) = 1$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$ et que ce scalaire λ est valeur propre de A.

Exercice n°4 (oraux de concours)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
a) Etablir l'égalité quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Pour $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $t \neq 0$ suffisamment petit $A + tI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et en déduire que l'égalité est encore vraie.

<u>Exercice n°5 :</u> Montrer que A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et la diagonaliser.

<u>Exercice n°6 :</u> Diagonaliser B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice n°7 (oraux concours)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.
Pour $f \in E$, on définit $\varphi(f)$ par :

$$\varphi \ : \quad \begin{array}{rcl} x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & si\ x \neq 0 \end{cases} \\ [0,1] & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.

3. Montrer que 1 est une valeur propre de φ et trouver l'espace propre associé.

4. Trouver les autres valeurs propres.

Exercice n°8 : Les deux questions sont indépendantes :

1) Soit A=($a_{i,j}$)∈ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses valeurs propres complexes (distinctes ou non), montrer que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{j,i}$
2) Soit A∈ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, B∈ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et x ∈ ℝ, en utilisant les produits par blocs, $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ B & I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & -xI_p \end{pmatrix}$, comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.

Exercice n°9

Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit un vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice n°10

1) Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie, montrer 0∉Sp(f) est équivalent à f surjectif
2) Soit E un K-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, a∈GL(E) et v = aouoa^{-1}
   Comparer Sp(u) et Sp(v) d'une part et E_λ(u) = E_λ(v) d'autre part.

Exercice n°11

Soit f un endomorphisme d'un K espace vectoriel et n un entier naturel non nul, on suppose que 0∈Sp(f^n), montrer que 0∈Sp(f).

Exercice n°12

Soit u un automorphisme d'un K-espace vectoriel E, établir que Sp(u^{-1}) = $\{\lambda^{-1}/\lambda \in Sp(u)\}$

Exercice n°13 (oraux de concours)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

a) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P
b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 + M = A$.
Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
c) Conclure sur les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice n°14

Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie E, on suppose que : Im(u-Id_E)∩ Im(u+Id_E) = {0}. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice n°15

Soit A=$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ ∈ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer B∈ $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que B^2=A

Exercice n°16

Soient u et v deux endomorphismes d'un ℂ-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u et v commutent. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice n°17

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, défini par : $\varphi(\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}$

1) Montrer que φ est diagonalisable
2) Préciser les espaces propres de φ
3) Calculer la trace et le déterminant de φ

Exercice n°18 (oraux de concours)

Soit l'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - XP''$.

1. Monter que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Trouver la seule valeur propre possible λ de u.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? inversible ?

4. Calculer le sous espace propre associé à λ.

Exercice n°19

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

1) Justifier que tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre
2) Observer que l'endomorphisme φ *de* $\mathbb{C}[X]$: P(X)→ $(X-1)P(X)$ n'a pas de valeurs propres.

Exercice n°20 (oraux concours)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice n°21 :

Soit A=$\begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que A est inversible et calculer pour tout k∈ $\mathbb{Z}$, A^k

Exercice n°22 : Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$

Exercice n°23 (oraux Ecricome)

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer les valeurs propres de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

2) En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

3) Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n sous forme de tableau matriciel.

4) Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$.

a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.

b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n et v_n en fonction de n.