Colle 4

dimanche 14 septembre 2025 17:23

En vrac

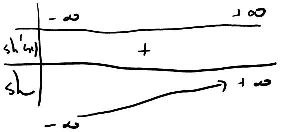
1) Faux, la fonction Arccos est définie sur $[-1,1]$
(Elle renvoie à un cosinus, un angle)

2) Faux, la confusion vient du fait que cos est paire, et on pourrait se demander si la réciproque hérite de cette parité. C'est faux pour une fonction paire mais vraie pour une fonction impaire.

3) Faux, confusion entre Arctan et $\tan^{-1}$
(Rq, il y a un abus de langage sur les calculatrices et parfois, on voit $\tan^{-1}$ plutôt que Arctan)

4) Vrai, mais un peu mal dit. Il faudrait préciser l'intervalle mais dans la mesure où elle est bijective sur $\mathbb{R}$, on peut accepter...

$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\, x > 0$



sh est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
sh est continue
Par le th. de bijection, sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

5) Vrai, $\mathrm{Arccos} : [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$
$\cos(\mathrm{Arccos}(\frac{1}{5})) = \frac{1}{5}$, de façon générale $\cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x$
Le problème est l'évaluation de $\mathrm{Arccos}(\cos x)$

6) Vrai, car $\frac{\pi}{5} \in [0,\pi]$.

Exo n°1

$f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$

1) D'abord, $x \neq 0$ pour que $\frac{1}{x}$ soit défini
Ensuite, on doit avoir $1 + \frac{1}{x} > 0$
or $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$1+\frac{1}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty;-1[\,\cup\,]0;+\infty[}$$

2) , $1+\dfrac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to-1\\x<-1}]{} 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$

$\cdot$ $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

$= x\ln(1+x) - x\ln x$

or $x\ln(1+x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ et $x\ln x \xrightarrow[x\to0]{} 0$ (limite de référence)

ainsi, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0}$

3) $\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{\ln(1+h)-\ln(1+0)}{h} \xrightarrow[h\to0]{} \ln(1+x)'\big/_{x=0}$ car $x\mapsto\ln(1+x)$ est dérivable.

or $\ln(1+x)' = \dfrac{1}{1+x}$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{1+0} = 1}$

On pose $h = \dfrac{1}{x}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} h = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{h}\ln(1+h)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

4) $f'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + x\times\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$

$f'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

$f'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-(1+x)}{x(1+x)^2} + \frac{x}{x(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2}$$

Donc f'' est du signe de x.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$	▨	$-$
f'	0 ↗	▨	$+\infty$ ↘ 0
$f'(x)$	$+$	▨	$+$
f	↗	▨	↗

Exo n°2.

$t = \arctan(\operatorname{sh} x)$, calcul de $\tan t$, $\cos t$ et $\sin t$.

- $\boxed{\tan(\arctan \operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x}$
- $\cos(\arctan \operatorname{sh} x) = ?$

Car $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ donc $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x}$

et $\cos t = \pm \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x}}$ or $t = \arctan \operatorname{sh} x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos t \geq 0$

Ainsi $\boxed{\cos t = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x}}}$

- Comme $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$, on a $\sin t = (\tan t) \times \cos t$

$$\boxed{\sin t = \operatorname{sh} x \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x}}}$$

Exo n°3

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

1) D_f 2) parité 3) $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 4) Mq f dérivable et dérivée 5) Pour $x>1$ $f(x)$ en fonction de arctan

1) arcsin est défini sur $[-1, 1]$
On doit donc avoir $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1; 1]$.

Soit $\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $\varphi'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}$

$$\varphi'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Ainsi $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) D'abord arcsin est impaire
$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$
Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

3) $\boxed{f(0) = \arcsin(0) = 0}$

$\boxed{f(1) = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{f(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{1+3}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin(0) = 0}$$

4) $x \to \frac{2x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de 2 fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

De plus, arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \times \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2(1-x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^2\sqrt{(1+x^2-2x)(1+x^2+2x)}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cancel{(1+x^2)}}{(1+x^2)^2\sqrt{(1-x)^2(1+x)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|}$$

Ainsi : sur $[-1;1]$, $|1-x^2| = 1-x^2$ donc $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$

5) Pour $x>1$, $f'(x) = -2 \times \frac{1}{1+x^2}$

Donc $f(x) = -2\,\mathrm{Arctan}(x) + \text{cste}$

or $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ donc $-2\underbrace{\mathrm{Arctan}(\sqrt{3})}_{\frac{\pi}{3}} + \text{cste} = \frac{\pi}{3}$

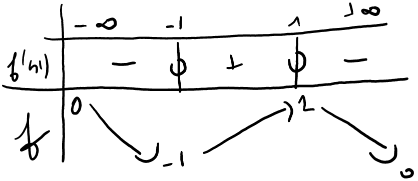
Donc $\text{cste} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

Et $\boxed{f(x) = -2\,\mathrm{Arctan}(x) + \pi}$

Exo n°4

Il suffit de reprendre l'étude de la fonction φ de l'exo n°3

1) $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$



Non, car le TVI assure, par ex, que $f(x) = -\frac{1}{2}$ admet une solution de $]-\infty;-1[$ et une autre sur $]-1;1[$

2) Par lecture du tableau, $\boxed{f(\mathbb{R}) =]-1;1[}$

3) Non, elle n'est pas injective !

Problème : $f(x,y) = (3x-5y\,;\,x-2y)$

1) Soient $((x,y);(u,v)) \in (\mathbb{R}^2)^2$ tels que :

$$\begin{cases} 3x-5y = 3u-5v \\ x-2y = u-2v \end{cases} \iff \begin{cases} 3(x-u) = 5(y-v) & (1) \\ (x-u) = 2(y-v) & (2) \end{cases}$$

1er cas : $x = u$, alors $y = v$

2nd cas : $x \neq u$, alors $y \neq v$

Alors $(1):(2)$ donne : $3 = \frac{5}{2}$ Absurde.

ccl : Nécessairement, $x = u$ et $y = v$ donc $\boxed{f \text{ injective.}}$

2) Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} u = 3x - 5y \\ v = x - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 5y = u & (1) \\ x - 2y = v & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - 5y = u & (1) \\ y = u - 3v & (2) \leftarrow (1) - 3 \times (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = u - 3v \\ x = \dfrac{u + 5(u - 3v)}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2u - 5v \\ y = u - 3v \end{cases}$$

Donc $\boxed{f \text{ est surjective sur } \mathbb{R}^2}$

3) • Comme f est injective et surjective sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est bijective et possède $\boxed{\text{ainsi une réciproque } f^{-1}}$

• $\boxed{f^{-1}((u,v)) = (2u - 5v \,;\, u - 3v)}$