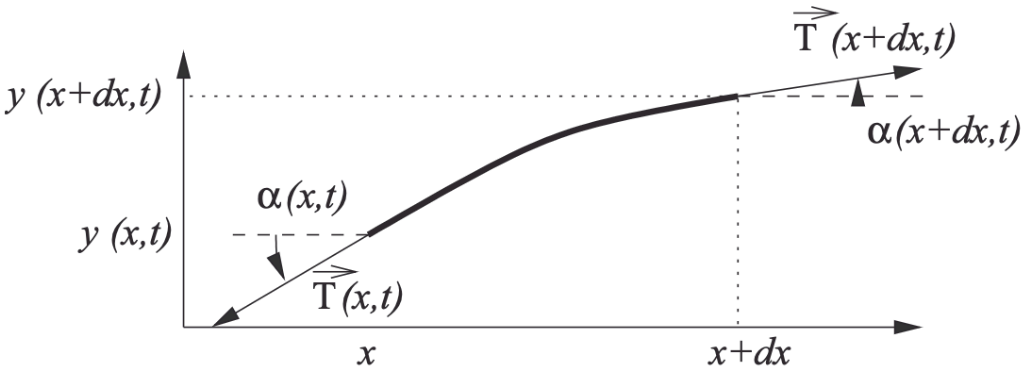
TD Ondes mécaniques

Exercice 1 : La corde vibrante

Un tronçon de corde horizontale $[x, x+dx]$, dont la tension à une de ses extrémités est T_0, de masse linéique μ, est animée d'un mouvement transversal de faible amplitude selon y modélisé par $y(x,t)$. On note $T(x,t)$ la tension au point d'abscisse x et $\alpha(x,t)$ l'angle d'inclinaison de la corde par rapport à l'axe horizontal. On fera l'approximation des petits angles et on négligera le poids devant les forces de tension.



a) Justifier que $\alpha(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$.

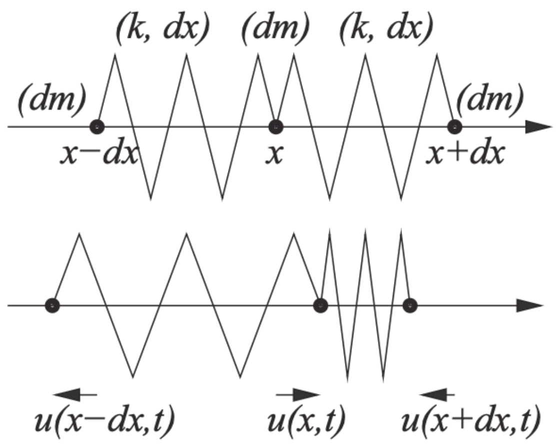
b) Montrer que $T(x,t) = T_0$.

c) Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par $y(x,t)$ et préciser l'expression de c en fonction de T_0 et μ.

d) L'alimentation électrique d'un train est assurée par le contact entre le cable horizontal appelé caténaire et un contacteur appelé pantographe qui soulève à son passage le caténaire d'une trentaine de centimètres. La tension de la caténaire est $T = 2{,}6 \cdot 10^4$ N, elle est en cuivre de masse volumique $\mu_{Cu} = 8900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et sa section est $S = 150\ \mathrm{mm^2}$. On estime que la vitesse du TGV ne doit pas dépasser 97% de la célérité c des ondes de vibration transversale de la caténaire. Déterminer la vitesse correspondante, et expliquer le terme « mur de la caténaire ». *Le record de vitesse du TGV du 3 avril 2007 est* $v = 574{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Exercice 2 : Vibration longitudinale dans un solide

Une tige solide selon x, de secion S, de masse volumique μ, est modélisée par une chaîne d'oscillateurs mécaniques. Une masselotte de masse $\mu S dx$ est à l'abscisse x au repos et à l'abscisse $x + u(x,t)$ au passage d'une onde de vibration longitudinale. Elle est reliée aux deux masselottes voisines, d'abscisses au repos $x - dx$ et $x + dx$, par deux ressorts de longueur à vide dx et de raideur $k = \frac{ES}{dx}$ où E est le **module d'Young** du matériau. On négligera toutes les autres forces devant celles exercées par les ressorts.



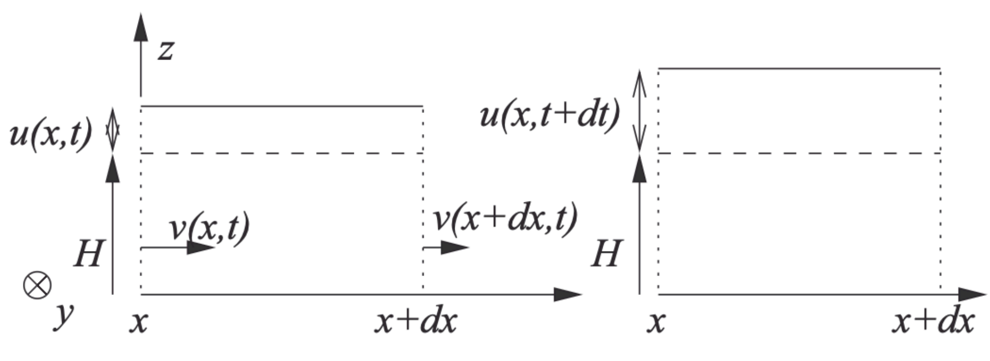
a) Quelle est l'unité et à quelle grandeur le module d'Young est-il homogène ? Pourquoi le qualifie-t-on de module d'« élasticité » ?

b) Écrire la loi de la quantité de mouvement sur la masselotte centrale.

c) Par un développement limité au second ordre, en déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par $y(x,t)$ et préciser l'expression de c en fonction de E et μ.

Exercice 3 : Les vagues en faible profondeur

Dans un bassin de largeur L selon y, de longueur infinie selon x et de profondeur moyenne H selon l'axe z orienté vers le haut, l'origine étant au fond du bassin, l'eau est assimilée à un fluide incompressible, parfait, de masse volumique μ. Au passage d'une vague homogène sur la largeur du bassin, on cherche le champ des vitesses sous la forme $\vec{v}(x,t) = v(x,t)\vec{u}_x$ et le champ des pressions sous la forme $\mathrm{P}(x,z,t)$. On note P_0 la pression dans l'air. Le niveau de l'eau à l'abscisse x à la date t est $z(x,t) = \mathrm{H} + u(x,t)$. On travaille sur la tranche d'eau située entre x et $x+dx$, en régime non permanent entre t et $t+dt$.



a) Commenter la relation suivante :

$$\mu\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \simeq -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P} + \mu\vec{g}$$

b) En déduire la relation (PU) entre $\mathrm{P}(x,z,t)$, z et $u(x,t)$, puis la relation (PV) entre $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathrm{P}(x,z,t)}{\partial x}$.

c) Déduire de (PU) et (PV) la relation entre $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

d) Par un bilan de masse (en régime non stationnaire ici) sur la tranche de fluide, en supposant $u(x,t) \ll \mathrm{H}$, établir la relation entre $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

e) En déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par $u(x,t)$ et préciser l'expression de c en fonction de g et H.

f) Expliquer pourquoi une vaguelette qui se propage vers le rivage ralentit.

g) Expliquer pourquoi une grosse vague qui se propage dans un bassin de profondeur constante se déforme et déferle.