TD Ondes mécaniques

Exercice 1 : La corde vibrante

a) La pente de la tangente à une courbe est égale à sa dérivée par rapport à x, mais aussi égale à la tangente de l'angle d'inclinaison. En utilisant l'approximation des petits angles

$$\alpha(x,t) \simeq \tan\alpha(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

b) La loi de la quantité de mouvement appliquée au tronçon de corde donne

$$\mu dx\vec{a} = \vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t)$$

$$\text{soit } \mu dx \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \end{array} \right. =$$

$$\left| \begin{array}{l} -T(x,t)\cos\alpha(x,t) \\ -T(x,t)\sin\alpha(x,t) \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t) \\ T(x+dx,t)\sin\alpha(x+dx,t) \end{array} \right.$$

En faisant l'approximation des petits angles, on en déduit le système

$$\begin{cases} 0 = -T(x,t) + T(x+dx,t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -T(x,t)\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\alpha(x+dx,t) \end{cases}$$

la première égalité s'écrit

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ donc } T(x,t) = T_0$$

c) En injectant cette relation dans la seconde équation, il vient

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)}{dx}$$

$$\text{soit } \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

On obtient donc l'EDA

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \text{ donc } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

d) La masse linéique de la caténaire est

$$\mu = \frac{dm}{d\ell} = \frac{\mu_{Cu} S d\ell}{d\ell} = \mu_{Cu} S = 1{,}34 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$$

On en déduit la célérité

$$c = \sqrt{\frac{26\,000}{1{,}34}} = 139 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

La vitesse du TGV ne doit pas dépasser

$$\frac{97}{100} \times 139 = 135 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 486 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

Si la vitesse du TGV dépasse cette valeur, les ondes de vibration créées par le soulèvement de la caténaire ne peuvent plus s'éloigner du train, et comme pour le mur du son, leur énergie s'accumule, l'amplitude des déformations de la caténaire augmente, elle peut se briser, ou le contact électrique avec la caténaire peut être rompu. Le record n'a pu être obtenu qu'en augmentant la tension de la caténaire sur la ligne où a été fait le test.

Exercice 2 : Vibration longitudinale dans un solide

a) La constante de raideur est en $N\cdot m^{-1}$ donc

$$[E] = \frac{N\cdot m^{-1}\cdot m}{m^2} = N\cdot m^{-2} = Pa$$

E est donc homogène à une pression et est lié aux déformation du matériau comme un ressort, ou un élastique.

b) La masselotte centrale est soumise aux forces de rappel $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ des ressorts de gauche et de droite.

$$\vec{F}_g = -k\left[(x+u(x,t)) - (x-dx+u(x-dx,t)) - dx\right]\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_g = k\left[-u(x,t) + u(x-dx,t)\right]\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_d = k\left[(x+dx+u(x+dx,t)) - (x+u(x,t)) - dx\right]\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_d = k\left[u(x+dx,t) - u(x,t)\right]\vec{u}_x$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la masselotte centrale s'écrit donc, en projection sur x :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{ES}{dx}\left[u(x+dx,t) + u(x-dx,t) - 2u(x,t)\right]$$

On utilise la formule de Taylor pour donner les développements limités au second ordre :

$$u(x+dx,t) \simeq u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\frac{dx^2}{2}$$

$$u(x-dx,t) \simeq u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}(-dx) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\frac{(-dx)^2}{2}$$

On remplace et on simplifie :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{ES}{dx}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}(dx)^2$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

qui est bien l'EDA avec $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$.

Exercice 3 : Les vagues en faible profondeur

a) On reconnaît la loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule de fluide, soumise aux forces de contact de pression (la viscosité est supposée nulle) et au poids. La raison pour laquelle ce n'est qu'une approximation est que l'accélération de la particule de fluide comporte un terme d'accélération convective qu'on ne peut expliquer que dans un cours complet de mécanique des fluides, mais ce terme est du second ordre.

b) En projetant sur les axes x et z, cette relation donne

$$\begin{cases} (\mathrm{PV})\ \mu\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

On intègre la seconde relation entre z où la pression vaut $\mathrm{P}(x,z,t)$ et $\mathrm{H}+u(x,t)$ où la pression vaut P_0 :

$$\int_z^{\mathrm{H}+u(x,t)} d\mathrm{P} = \int_z^{\mathrm{H}+u(x,t)} -\mu g dz$$

$$[\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}(x,z,t)] = -\mu g\,[\mathrm{H}+u(x,t)-z]$$

$$\text{donc (PU) } \mathrm{P}(x,z,t) = \mathrm{P}_0 + \mu g\,[\mathrm{H}+u(x,t)-z]$$

c) En dérivant (PU) par rapport à x, on en déduit

$$\frac{\partial \mathrm{P}(x,z,t)}{\partial x} = \mu g \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

ce qui permet d'éliminer $\frac{\partial \mathrm{P}(x,z,t)}{\partial x}$ dans (PV) :

$$\mu\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\mu g \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\text{soit } \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -g\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

d) Le bilan de masse sur la tranche peut s'écrire : la masse comprise dans la tranche à la date $t+dt$ est égale à celle dans la tranche à la date t plus la masse dm_e qui entre en x moins celle dm_s qui sort en $x+dx$:

$$\mu\mathrm{L}(\mathrm{H}+u(x,t+dt))dx = \mu\mathrm{L}(\mathrm{H}+u(x,t))dx$$

$$+\mu v(x,t)\mathrm{L}(\mathrm{H}+u(x,t))dt - \mu v(x+dx,t)\mathrm{L}(\mathrm{H}+u(x+dx,t))dt$$

$$\text{soit } \mu\mathrm{L}\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt} =$$

$$\mu\mathrm{L}\frac{v(x,t)(\mathrm{H}+u(x,t)) - v(x+dx,t)(\mathrm{H}+u(x+dx,t))}{dx}$$

On peut négliger u devant H dans le terme de droite car H ne s'élimine pas, d'où

$$\mu\mathrm{L}\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt} = -\mu\mathrm{LH}\frac{v(x+dx,t)-v(x,t)}{dx}$$

$$= -\mu\mathrm{LH}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

$$\text{soit } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\mathrm{H}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

e) On élimine $v(x,t)$ entre les deux équations aux dérivées partielles en dérivant la première par rapport à x, la seconde par rapport à t et en utilisant le théorème de Schwartz :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t} = -g\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\mathrm{H}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t\partial x} \end{cases} \quad \text{donc } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = g\mathrm{H}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{g\mathrm{H}}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

qui est bien l'EDA avec $c = \sqrt{g\mathrm{H}}$.

f) Lorsque la vaguelette s'approche du rivage, la hauteur d'eau H diminue donc la célérité diminue.

g) La profondeur d'eau du bassin est constante, mais la hauteur d'eau effective sous la crête de la vague est plus grande que sous la base de la vague. La crête se déplace donc plus vite que la base, et la vague se déforme puis déferle quand la crête passe au dessus de la base.