5° Le 1er coup arrive par le métal, le 2ème par l'air,

$t_{air} = L / v_{air} = 375/340 = 1,103$ s

$\tau = t_{air} - t_{cuivre} = 1,0$ s

$t_{cuivre} = 0,103$ s

$v_{cuivre} = L/t_{cuivre} = 3,64 . 10^3$ m.s^{-1}

6° L'aluminium est plus rigide donc la célérité est plus grande.

$t_{alu} < t_{cuivre}$ et $\tau' = t_{air} - t_{alu} > \tau$

Le décalage augmente.

Ex 2 : Corde vibrante. Ondes progressives, ondes stationnaires

1° $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha = \dfrac{\partial h}{\partial x}$

$$F_y(x_0, t) = T \sin \alpha = T \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t)$$

2° PFD à l'élément situé entre x et $x + dx$ de masse μdx

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T_g}(x,t) + \vec{T_d}(x+dx, t) = -\vec{T_d}(x,t) + \vec{T_d}(x+dx, t)$$

Par projection on obtient :

$$0 = -T(x,t)\cos\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t} = -T(x,t)\sin\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\sin\alpha(x+dx,t)$$

Hypothèse des petits angles :

$$T(x,t) = T(x+dx, t) = T$$

$$\mu \cancel{dx} \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t} = T \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} \cancel{dx}$$

Equation de d'Alembert : $\dfrac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t} = 0$

avec $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

3° Forme générale des solutions :

superposition d'ondes progressives : $f(x-ct) + g(x+ct)$

ou sinusoïde $H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$

4° Propagation de A vers B :

Onde dans le sens des x croissants : $H_0 \cos(\omega t - k(x - x_A) + \varphi)$

5° Onde progressive sinusoïdale transversale

6° Corde fixée aux 2 extrémités : les réflexions aux extrémités font apparaître un phénomène d'interférences

7° Cherchons une solution de l'équation de d'Alembert :

$$h(x,t) = f(x) \times g(t)$$

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$g(t) f''(x) - \frac{1}{c^2} f(x) g''(t) = 0$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = K$$

Pour que les deux conditions soient vérifiées ça doit être égale à une constante

ne dépend que de x

ne dépend que de t

K indépendante de x et de t.

$$f''(x) - K f(x) = 0 \qquad (1)$$

$$g''(t) - K c^2 g(t) = 0 \qquad (2)$$

si K est négatif, avec le signe "$-$" on a un terme positif, on retrouve une équation type oscillateur harmonique avec x comme variable.

on pose $k^2 = -K$ (on travaille sur la périodicité spatiale)

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

$$\longrightarrow f(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

De la même façon, on peut poser $\omega^2 = -Kc^2$

$$g''(t) + \omega^2 g(t) = 0$$ (on travaille sur la périodicité temporelle)

$$\longrightarrow g(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

Conditions aux limites :

$$h(0,t) = 0$$
$$h(2L,t) = 0$$

$$h(x,t) = f(x) \times g(t)$$

$$h(0,t) = 0 = (A\cos 0 + B \sin 0)(C\cos \omega t + D \sin \omega t)$$

$\hookrightarrow$ $A = 0$

$$h(2L,t) = 0 = B \sin k2L(C\cos\omega t + D \sin \omega t)$$

$\hookrightarrow$ $2kL = n\pi$ d'où $k_n = \dfrac{n\pi}{2L}$

Rq $\quad R\sin(kx + \varnothing) = \underbrace{R\sin\varnothing}_{A} \cos kx + \underbrace{R\cos\varnothing}_{B} \sin kx$

avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan\varnothing = \dfrac{A}{B}$

$$f(x) = A\cos kx + B \sin kx = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(kx + \varnothing)$$
$$= B \sin(kx + \varnothing)$$

$$g(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t = \sqrt{C^2 + D^2}\cos(\omega t - \varphi)$$

$$h(x,t) = f(x) \times g(t) = H_0 \cos(\omega t - \varphi)\sin(kx + \varnothing)$$

avec $\varphi = 0$ on a $h(x,t) = H_0\cos(\omega t)\sin(kx + \varnothing)$

Autre méthode : on injecte $h(x,t)$ dans l'équation de d'Alembert et on vérifie qu'elle est solution.

8° Ondes stationnaires

9° $h(x,t) = H_0 \cos \omega t \sin(kx + \phi)$

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2}$$

$$-k^2 h(x,t) = -\frac{\omega^2}{c^2} h(x,t) \quad \text{d'où} \quad \omega = ck$$

10° Nœuds en $x = 0$ et $x = 2L$

$$\longrightarrow \sin(k 2L) = 0 \quad \text{donc} \quad k_n = \frac{n\pi}{2L}$$

par suite $\omega_n = c k_n = \dfrac{n\pi c}{2L}$

et $f_n = \dfrac{\omega_n}{2\pi} = \dfrac{nc}{4L}$

11° Allure des premiers modes :

$n = 1$: 2 noeuds aux extrémités + 1 ventre

$n = 2$: 3 noeuds $(0, L, 2L)$ + 2 ventres

$n = 3$: 4 noeuds $(0, 2L/3, 4L/3, 2L)$ + 3 ventres

$n = 4$: 5 noeuds $(0, L/2, L, 3L/2, 2L)$ + 4 ventres

Ex 3 : Corde de Melde

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Rq : $T \nearrow$ alors $c \nearrow$
$\mu \nearrow$ alors $c \searrow$ (facteur inertiel)

⚠ Longueur de corde L ! Dans l'ex 2 c'était $2L$

$L \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$ et $f_n = \frac{nc}{2L}$

a) $f_2 = \frac{2c}{2L}$ et $f_3 = \frac{3c}{2L}$

on voit que $f_2 = 2f_1$ et $f_3 \approx 3f_1$ avec $f_1 = 9{,}5$ Hz

donc $f_n = n \times f_1$ pour les harmoniques suivantes.

b) Prenons $f_2 = \frac{2c}{2L}$, on trouve $c = f_2 \times L$

soit $c = 22{,}2 \ m.s^{-1}$

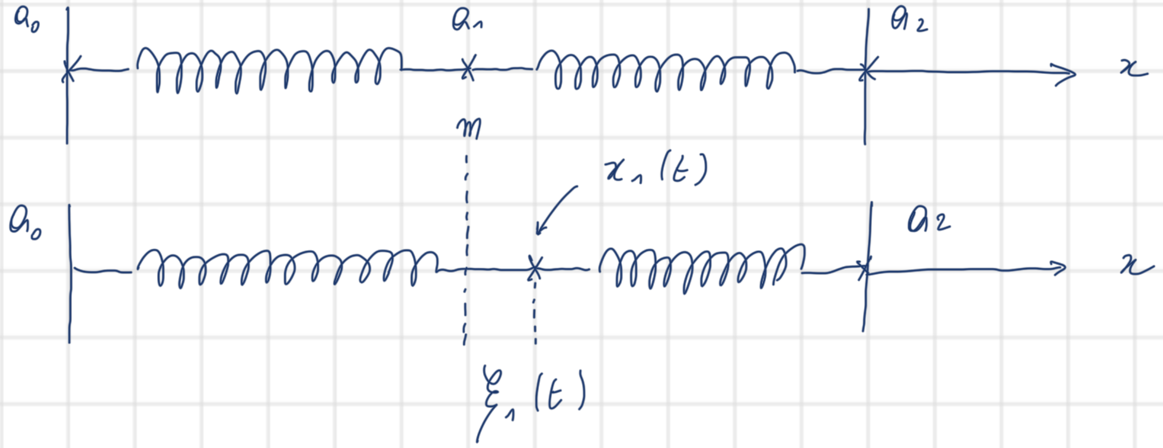
c) $P = M \times g = 0{,}025 \times 9{,}8 = 0{,}245$ N

$T = P = 0{,}0245$ N et $\mu = \frac{T}{c^2} = 5.10^{-4} \ kg.m^{-1}$

Ex 4 : Une masse et deux ressorts.

1° On note $\xi_0(t)$, $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ les petits déplacements de a_0, a_1 et a_2

Les extrémités a_0 et a_2 sont fixes donc $\xi_0(t) = \xi_2(t) = 0$



$x_1(t) = a_1 + \xi_1(t)$ d'où $\xi_1(t) = x_1(t) - a_1$

2° Ressort 1 : $+\xi_1(t)$ Ressort 2 : $-\xi_1(t)$

3° $\overrightarrow{F_1^-} = -k(l + \xi_1(t) - l) = -k\,\xi_1(t)\,(\overrightarrow{u_x})$

4° $\overrightarrow{F_1^+} = -k(l - \xi_1(t) - l) = +k\,\xi_1(t)\,(-\overrightarrow{u_x})$

5° PFD : $m\vec{a} = \sum \overrightarrow{f_{ext}}$

$$m\frac{d^2\xi_1(t)}{dt^2}\overrightarrow{u_x} = -2k\,\xi_1(t)\,\overrightarrow{u_x}$$

situation analogue à un ressort unique de constante $2k$

6° Projection : $\dfrac{d^2\xi_1(t)}{dt^2} + \omega^2\,\xi_1(t) = 0$

avec $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

7° Solution du type : $\xi_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$t = 0$ $\quad \xi_1(0) = u = A\cos\varphi$

$\dot{\xi}_1(0) = 0 = -A\omega\sin\varphi$

donc $\varphi = 0$ et $A = u$

$\xi_1(t) = u\cos(\omega t)$

Ex 5

1° Transformation isentropique : on néglige les phénomènes dissipatifs comme la conduction thermique (adiabatique) ou les phénomènes de viscosité (réversible)

2° PFD : $\rho S_0 dx \dfrac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} = P(x,t) S_0 \vec{e_x} - P(x+dx,t) S_0 \vec{e_x}$

$$\rho_0 \cancel{S_0}\cancel{dx} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \cancel{S_0}\,\cancel{dx} \quad \text{en projection}$$

approx acoustique

$$\longrightarrow \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

3° $\dfrac{\delta V}{V} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$\chi_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_S$ donc $\dfrac{\delta V}{V} = -\chi_S\,\delta P$

sera notée $p(x,t)$ surpression acoustique

$$p(x,t) = -\frac{1}{\chi_S}\left(\frac{\delta V}{V}\right) = -\frac{1}{\chi_S}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

en dérivant par t : $\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_S}\left(\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)$

4° On dérive $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)$$

$$= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)$$

$$= \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

5° $PV^\gamma = \text{constante}$

$$d(\ln P) + \gamma\, d(\ln V) = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

donc pour de petites variations : $\frac{\delta V}{V} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\delta P}{P}$

avec $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s$

on obtient : $\frac{\delta V}{V} = -\chi_s\, \delta P$

à l'aide de ces deux expressions de $\frac{\delta V}{V}$ il vient :

$$-\chi_s \cancel{\delta P} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\cancel{\delta P}}{P}$$

et donc $\chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma P_0}$ ($P = P_0$ à l'équilibre)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma P_0}}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

Ex 6