Colle sur le chapitre n°8 « Algèbre générale »

En vrac : vrai ou faux ?

1) Une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ est injective
2) La restriction d'une injection est une injection.
3) Si f et g sont des applications de E dans E telles que gof=Id_E alors f ou g est bijective
4) Si f est une bijection de E dans F et B une partie de F alors l'image réciproque de B par f est l'image directe de B par f^{-1}

Exercice n°1

1) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \frac{2x}{1+x^2}$, résoudre les équations f(x) $= \frac{1}{2}$ et f(x)=2
   L'application f est-elle injective ? surjective ?
2) Soit g : [0,1] →[0,1], x→ $\frac{2x}{1+x^2}$
   Montrer que g est en fait une bijection de [0,1] dans [0,1]
   Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice n°2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par : f(x,y,z) = (x+y+z,2x+3y+4z,5x+6y+8z)

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice n°3

Soit E un ensemble, pour A⊂E, on note $\mathbb{I}_A$ l'application telle que, si x∈A, alors $\mathbb{I}_A$(x)=1 sinon $\mathbb{I}_A$(x)=0

1) Soient A et B des parties de E, montrer que $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A\, \mathbb{I}_B$
2) Montrer que $\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A\, \mathbb{I}_B$
3) On pose AΔB=(A\B)∪ $(B\backslash A)$, montrer que $\mathbb{I}_{A\Delta B} = (\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B)^2$

Exercice n°4

Pour (x,y)∈ $\mathbb{R}^2$, *on pose* $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x^2-y^2=x-y

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Déterminer la classe d'équivalence pour x∈ $\mathbb{R}$

Problème: Et si on révisait ???

Soit f une fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, f ''(x)+f(-x) = cos(x)

Le but du problème est de déterminer l'ensemble des fonctions f solutions.

On définit les fonctions g et h sur $\mathbb{R}$ par : g(x) $= \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et h(x) $= \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

1) Montrer que g est paire et h impaire.
2) Montrer que g''(x) $= \frac{f''(x)+f''(-x)}{2}$
3) Montrer que g est solution de l'équation différentielle : y''+y = cos(x)
4) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel α, tel que $g(x) = \alpha\cos(x) + \frac{x\sin(x)}{2}$
5) On admet que h est solution de l'équation y''-y = 0, résoudre cette équation différentielle et en déduire l'expression de h
6) En déduire alors la forme générale de f (on ne demande pas de vérifier réciproquement, si l'ensemble des fonctions déterminées sont bien solutions du problème).