**Colle sur le chapitre n°9 « Groupes »**

**En vrac : vrai ou faux ?**

1) $(\mathbb{N},+)$ est un groupe abélien
2) Si H est un sous-groupe de G, alors l'élément neutre de G est aussi celui de H
3) Soit (G,*) un groupe, $\forall(a,b,c) \in G^3, a * b = a * c \Leftrightarrow b = c$

**Exercice n°1**

On note $i\mathbb{Q} = \{ir, r \in \mathbb{Q}\}$ et $\mathbb{Q}[i] = \{a+ib, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$

1) Montrer que $i\mathbb{Q}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$
2) Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$
3) Est-ce que $\mathbb{Q} \cup i\mathbb{Q}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ ?

**Exercice n°2**

Soit G un ensemble et * une loi de composition interne sur G, on la suppose associative et unifère.

1) On suppose que (G,*) est un groupe, montrer que pour tout a∈G, l'application $f_a : x \to x * a$ est bijective et préciser sa bijection réciproque.
2) Réciproquement, on suppose que pour tout a∈G, l'application $f_a : x \to x * a$ est bijective, montrer que (G,*) est un groupe.

**Exercice n°3**

Soit G un groupe noté multiplicativement, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par : $\forall(x,y) \in G^2, x\, \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists a \in G, y = axa^{-1}$, montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

**Exercice n°4**

Soit G un groupe noté multiplicativement, soit A un sous-groupe de G, pour x∈G, on note $Ax=\{ax, a\in A\}$

Et $xA=\{xa, a\in A\}$

On considère l'ensemble B des éléments x de G tels que Ax=xA

1) Montrer que $A\subset B$
2) Montrer que pour tout x de B et tout a de A, $xax^{-1} \in A$
3) Montrer que pour tout x de B, on a $x^{-1} \in B$

**Problème:**

On considère l'équation de Pell-Fermat : $a^2-2b^2=1$ d'inconnues $(a,b)\in Z^2$

Soit G l'ensemble des solutions de cette équation, ainsi $G=\{(a,b)\in \mathbb{Z}^2, a^2 - 2b^2 = 1\}$

On définit sur $\mathbb{Z}^2$, une opération * définie par $\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^2, \forall(c,d) \in \mathbb{Z}^2$, $(a,b)*(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$

1) Montrer que $\forall(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)$

2) En déduire que * est une loi de composition interne sur G

3) Montre que la loi * est commutative (pour les courageux, montrer qu'elle est associative sur G)

4) Montrer que (G,*) admet un élément neutre qu'on précisera

5) Montrer que $\forall(a,b) \in G^2$, $(a,b)*(a,-b)=(1,0)$