Colle sur le chapitre n°13 **« Espace vectoriel»**

En vrac : vrai ou faux ?

1) L'ensemble des suites réelles monotones est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.
2) Pour toutes parties A et B de l'espace E, vect(A∩B)=vet(A) ∩vect(B)
3) L'ensemble des suites arithmétiques réelles de raison 2 est un espace vectoriel.
4) Si E,F et G sont trois K-espaces vectoriels alors (E+F) $\cap G =$(E∩G)+(F∩G)

Exercice n°1

On note E l'espace vectoriel de fonctions de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

On note L l'ensemble des fonctions L de E de la forme x→ax où a est une constante et G l'ensemble des fonctions de E qui sont nulles en 1.

1) Montrer que L et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Montrer qu'ils sont supplémentaires dans E.

Exercice n°2

Dans l'espace vectoriel de fonctions de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, on considère pour n∈ $\mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \to e^{x\sqrt{n}}$

Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice n°3

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E, on choisit x∈E et on écrit x $= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

On pose pour tout k∈ $[\![1, n]\!]$, $v_k = x + e_k$

1) Exprimer $\sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ à l'aide de x
2) Montrer que si $\sum_{k=1}^{n} x_k$=-1, alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée.
3) On suppose ici que $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, montrer qu'alors $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E
   Donner les coordonnées du vecteur x dans cette base.
4) Etablir que : $(v_1, \dots, v_n)$ est liée⇔ $\sum_{k=1}^{n} x_k$=-1

Exercice n°4

Soit a∈ $\mathbb{R}$, on note E_a l'ensemble des polynômes P divisibles par X-a

1) Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
2) Soient (a,b)∈ $\mathbb{R}^2$ tels que a≠b, montrer qu'il existe (α, β)∈ $\mathbb{R}^2$ tels que 1= $\alpha(X - a) + \beta(X - b)$
   En déduire que $\mathbb{R}[X] = E_a + E_b$
   La somme est-elle directe ?

Problème:

Soit F={(x, y, z, t)∈ $\mathbb{R}^4$, $x + 3y - z = t$}

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^4, +, .)$
2) Déterminer une famille génératrice de F
3) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$