Colle sur le chapitre n°14 « Applications linéaires »

<u>En vrac : vrai ou faux ?</u>

1) Si u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ alors rg(u+v)=rg(u)+rg(v)
2) L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie.
3) Pour construire un endomorphisme de $\mathbb{C}$, *vu comme* $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de déterminer f(i) et f(1-i)
4) Si f est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie E, et si E = Im(f)$\oplus$Ker(f), alors f est un projecteur.

<u>Exercice n°1</u>

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, f(x,y,z) = (x-y,0,z)

1) Déterminer le noyau de f et en donner une base
2) Déterminer l'image de f et en donner une base
3) Montrer que f est un projecteur dont on précisera les caractéristiques.

<u>Exercice n°2</u>

On considère les espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: F={(a,b,c)$\in \mathbb{R}^3, a - b + c = 0\}$ et G=vect((1,1,1))

1) Montrer que F et G sont supplémentaires
2) Déterminer le projeté d'un vecteur (a,b,c)$\in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G

<u>Exercice n°3</u>

On fixe un polynôme Q$\in \mathbb{R}[X]$ non nul. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme f(P) égal au reste de la division euclidienne de P par Q

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2) Montrer que f est un projecteur
3) Préciser Ker(f) et Im(f)

<u>Exercice n°4</u>

Soit u=(2,1,-1), v=(1,-1,3), w=(3,3,-5) et F=vect(u,v,w)

1) Déterminer une base de F
2) Montrer que f : (a,b,c)→(3a+c,a-b+c,-3a-3b+c) est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
3) Déterminer une base de Ker(f)
4) Déterminer une base de Im(f)
5) A-t-on $\mathbb{R}^3$ = Ker(f)$\oplus$Im(f)
6) Les vecteurs u,v,w sont-ils des éléments de Im(f) ?

<u>Problème:</u>

On considère l'application f définie par : f :$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, (x, y, z) →(2x-2y+4z, -x+y-2z, -x+y-2z)

1) Montrer que f est bien une application linéaire.
2) Déterminer Ker(f)
3) Déterminer un supplémentaire de f dans $\mathbb{R}^3$
4) Soit P={(x, y, z)$\in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
   a) Justifier que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
   b) Démontrer que $\mathbb{R}^3$ = P$\oplus$vect($\vec{a}$) avec $\vec{a}$ = (1,1,1)
   c) Quelle est l'image de $\vec{b}$ = (1,2,3) par la projection sur P parallèlement à vect($\vec{a}$) ?