

**Colle sur le chapitre n°15****« Intégrale »****En vrac : vrai ou faux ?**

- 1) Si  $f \in C^0(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$  alors la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est toujours  $C^1$  sur  $I$
- 2) Si  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  et si  $\int_a^b f(t) dt = 0$  alors  $f = 0$  sur  $[a, b]$
- 3) Soit  $I = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du$  alors le changement de variable  $u = \sin(t)$  où  $t \in [0, \pi]$  permet de calculer  $I = \frac{\pi}{4}$

**Exercice n°1**

Déterminer la dérivée de  $f : x \mapsto \int_1^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

**Exercice n°2**

On pose  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2(t)} dt$

- 1) Montrer que  $F$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$
- 2) Pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , calculer  $F(x)$  en posant  $t = \arctan(u)$
- 3) Déterminer les valeurs de  $F(\frac{\pi}{2})$  et de  $F(\pi)$

**Exercice n°3**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

- 1) Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$
- 2) A l'aide d'une IPP, montrer que  $nu_n = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{2n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^2} dt$
- 3) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$

**Exercice n°4**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2} dt$

- 1) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante.
- 2) Calculer  $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$  en fonction de  $n$
- 3) Montrer que pour  $2 \leq n$ ,  $\frac{1}{n+1} \leq 3I_n \leq \frac{1}{n-1}$
- 4) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

**Problème:**

On définit les intégrales :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$  et  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

- 1) Déterminer  $J_0$  et  $J_1$
- 2) Calculer  $J_2$
- 3) Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \geq 0$
- 4) Démontrer que :  $J_{n+1} - J_n \leq 0$
- 5) A l'aide du changement de variable  $u = \frac{\pi}{2} - t$ , montrer que  $I_n = J_n$
- 6) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel,  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
- 7) En déduire la valeur de  $I_3$