Autour de la notion de démonstration

(hommage au regretté Gilles Dowek)

Le spectre de la vérité

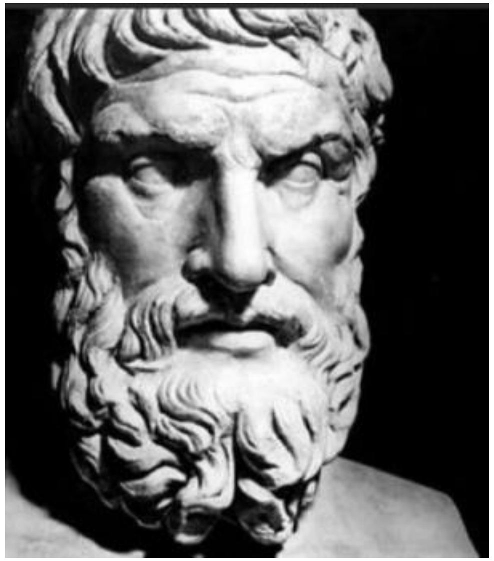
L’étymologie de « vérité » n’est pas grecque mais romaine. Le mot est construit sur le préfixe indoeuropéen *« vir »* qui signifie barrière.

Faire le droit, c’est littéralement « construire une barrière droite » et « redresser les torts » , redresser le tordu.

La vérité au sens romain du terme relève de l’application de règles et trouve sa source dans le domaine juridique.

Le concept de vérité varie d’une culture à l’autre . En Occident, nous sommes sous l’influence d’une autre vérité *« l’aléthia »* grecque qui, elle par la notion même de dévoilement amène à une vision Platonicienne des mathématiques (pour les platoniciens, on découvre des concepts mathématiques).

Les mathématiques ont au moins affaire avec la version « faible » de vérité au sens romain du terme (se poserait alors la question de leur efficacité mais c’est un autre sujet…)



Parménide,
à l’origine de *l’aléthia*

Au passage, à la question de Ponce Pilate « Qui es-tu ? »

Jésus répondit « Je suis la vérité »

Mais l'a-t-il dit en

-En hébreux ? אני האמת (**Ani ha-emet) , ce qui correspond au fait d'agir**

-En grec ? **ἐγώ εἰμι ἡ ἀλήθεια (egṓ eimi hê alḗtheia), ce qui correspond à la vérité au sens philosophique**

-En latin ? **Ego sum veritas, ce qui correspond à une forme de « légitimité »**

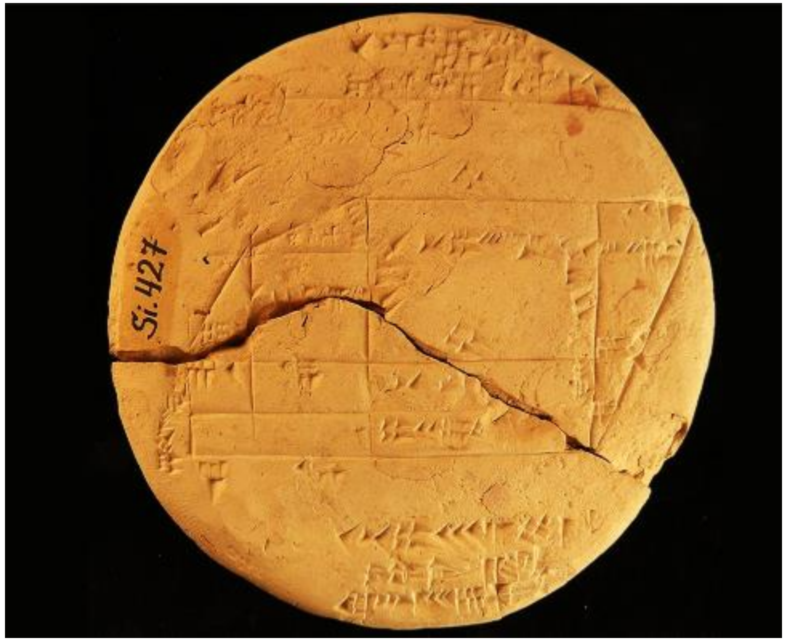
Ponce Pilate et Jésus,
image non contractuelle

Pourquoi des démonstrations?

Lorsqu’on parcourt les éléments d’Euclide, on constate qu’Euclide part d’une série de postulats, et on construit à partir de ces postulats, des propositions plus complexes utilisant des connecteurs logiques.

Le postulat est un présupposé non démontrable, correspondant à une expérience empirique partagée. Mais alors, on pourrait se dire…Pourquoi ne pas directement aller à l’expérience ?

Par exemple, le principe du théorème de Pythagore était connu des Babyloniens, dix siècles avant notre ère !

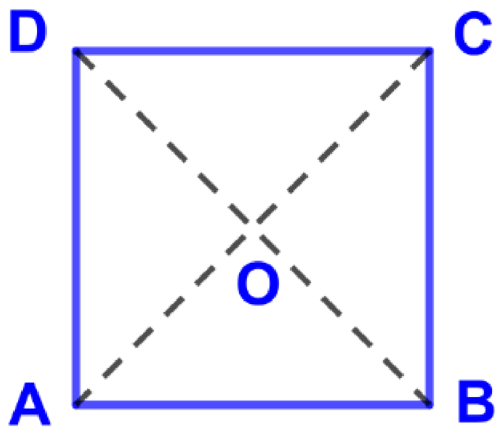


Une tablette Babylonienne
avec une démonstration du
théorème de Pythagore par puzzle

La secte des Pythagoriciens était animée par l'idée que tout pouvait s'exprimer à l'aide des entiers naturels (le zéro étant à part), et par des rapports d'entiers naturels (c'est-à-dire des fractions). L'intelligence consiste ainsi à faire des rapports au sens propre comme au sens figuré.

Mais un problème apparaît alors. La diagonale d'un carré ne peut s'exprimer comme le rapport de longueurs entières !

Dit autrement, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



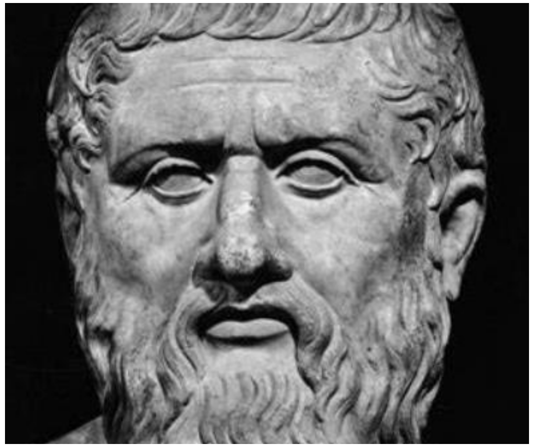
Au passage, ces grandeurs ne sont pas rationnelles (au sens commun du terme) et relèvent de l'irrationnalité !

Ce genre de découverte a renforcé chez les Grecs, l'idée que les mathématiques ne peuvent pas reposer sur l'observation ou l'intuition seule. Il faut des fondations solides, des axiomes, et des chaînes de raisonnement déductif.

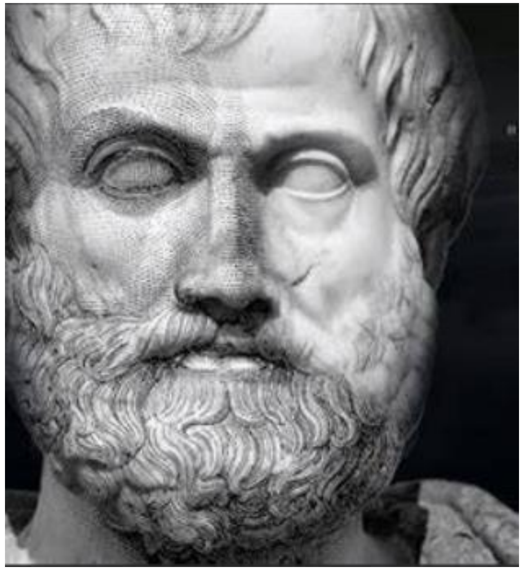
« Outre l'existence des choses sensibles et des Idées, Platon admet celle des Choses mathématiques (Nombres, Lignes, Surfaces, Solides), qui sont des réalités intermédiaires (Metaxu), différentes, d'une part, des Choses sensibles, en ce qu'elles sont éternelles et immobiles,

et d'autre part, des Idées, en ce qu'elles sont une pluralité d'exemplaires semblables, tandis que l'Idée est en elle-même une réalité une, individuelle et singulière. »

Aristote, Métaphysique



Platon



Aristote

La démonstration s’est imposée comme essentielle car elle garantit une vérité universelle et indépendante de l’intuition ou de l’expérience. Dire “ça se voit” peut être trompeur : certaines idées mathématiques contredisent nos intuitions (ex. : paradoxes…). L’expérimentation ou le calcul sur des cas particuliers peut suggérer une règle, mais seule une démonstration prouve qu’elle est vraie **dans tous les cas**.

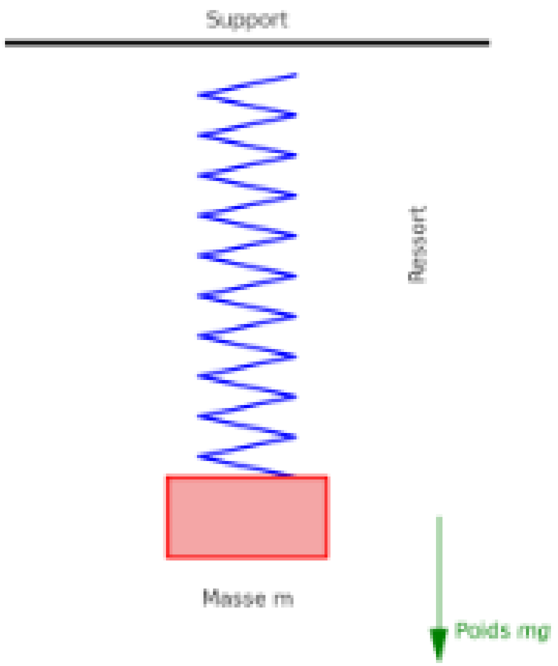
Cette exigence de rigueur n’a pas émergé partout de la même manière. Elle est typique de la tradition gréco-européenne, mais d’autres cultures ont développé des mathématiques avancées avec des approches parfois différentes, comme en Inde, en Chine ou dans le monde islamique, où l’on trouve parfois des raisonnements implicites ou visuels, mais aussi des démonstrations formelles.

En résumé, la démonstration donne aux mathématiques leur solidité logique et leur universalité – elle transforme une croyance plausible en vérité certaine.

Tout est-il mathématisable?

Sous l'impulsion de Galilée qui voyait la Nature utiliser une grammaire mathématique, de Newton et de Leibniz, pères du calcul différentiel, émerge l'idée que tout est mathématisable (ce sera la forme forte du positivisme en sciences) par des équations et équations différentielles

Les exemples qui fonctionnent bien : le pendule, la chute libre, la masse reliée à un ressort…



$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

- m : masse
- k : constante de raideur du ressort
- $x(t)$: position verticale (par rapport à la position d'équilibre)
- $\ddot{x}(t)$: accélération de la masse

Mais d’autres exemples se modélisent avec ce système plutôt mal voire ne peuvent pas (par exemple le problème de la circulation des avions sur une piste)

On veut modéliser comment une maladie (comme la grippe, le COVID, etc.) se propage dans une population répartie géographiquement.
Dans les modèles classiques (comme le modèle SIR), on utilise des **équations différentielles** globales, du type :

- S = individus sains
- I = infectés
- R = guéris
- On suppose que tout le monde peut interagir avec tout le monde (hypothèse de "mélange parfait").

Dans la **réalité**, les gens sont répartis dans l’espace, interagissent surtout **localement** (famille, voisins, école…), et **les comportements peuvent varier**.

On représente la population comme une **grille** (2D), où chaque cellule est une personne ou une zone.
Chaque cellule a un **état** :
•S (sain)
•I (infecté)
•R (rétabli ou immunisé)
•(éventuellement : V vacciné, ou D décédé)

À chaque tour (itération de temps), chaque cellule :
1.Regarde l'état de ses voisins (au sens de von Neumann : haut, bas, gauche, droite, ou au sens de Moore : + diagonales)
2.Suit une **règle probabiliste** de transition :
- •Si elle est S et qu'au moins un voisin est I, elle a **p% de chance** de devenir infectée (I)
- •Si elle est I, elle devient R après n jours (ou meurt avec une certaine probabilité)
- •R reste stable ou perd l'immunité après un temps

Ces règles peuvent aussi intégrer :
•le **port du masque** (réduit p)
•la **vaccination**
•les **déplacements** (migration de cellules)
•des **confinements locaux**

Comparaison entre les deux types de modélisation:

Aspect	Équation différentielle	Automate cellulaire
Spatialisation	Difficile à intégrer	Naturel et visuel
Interactions locales	Approximées ou ignorées	Prises en compte directement
Hétérogénéité (villes/campagnes)	Complexe	Facile à modéliser
Comportement individuel	Abstrait ou absent	Implémentable cellule par cellule
Simulation visuelle	Peu intuitive	Très intuitive (comme Conway's Game of Life)

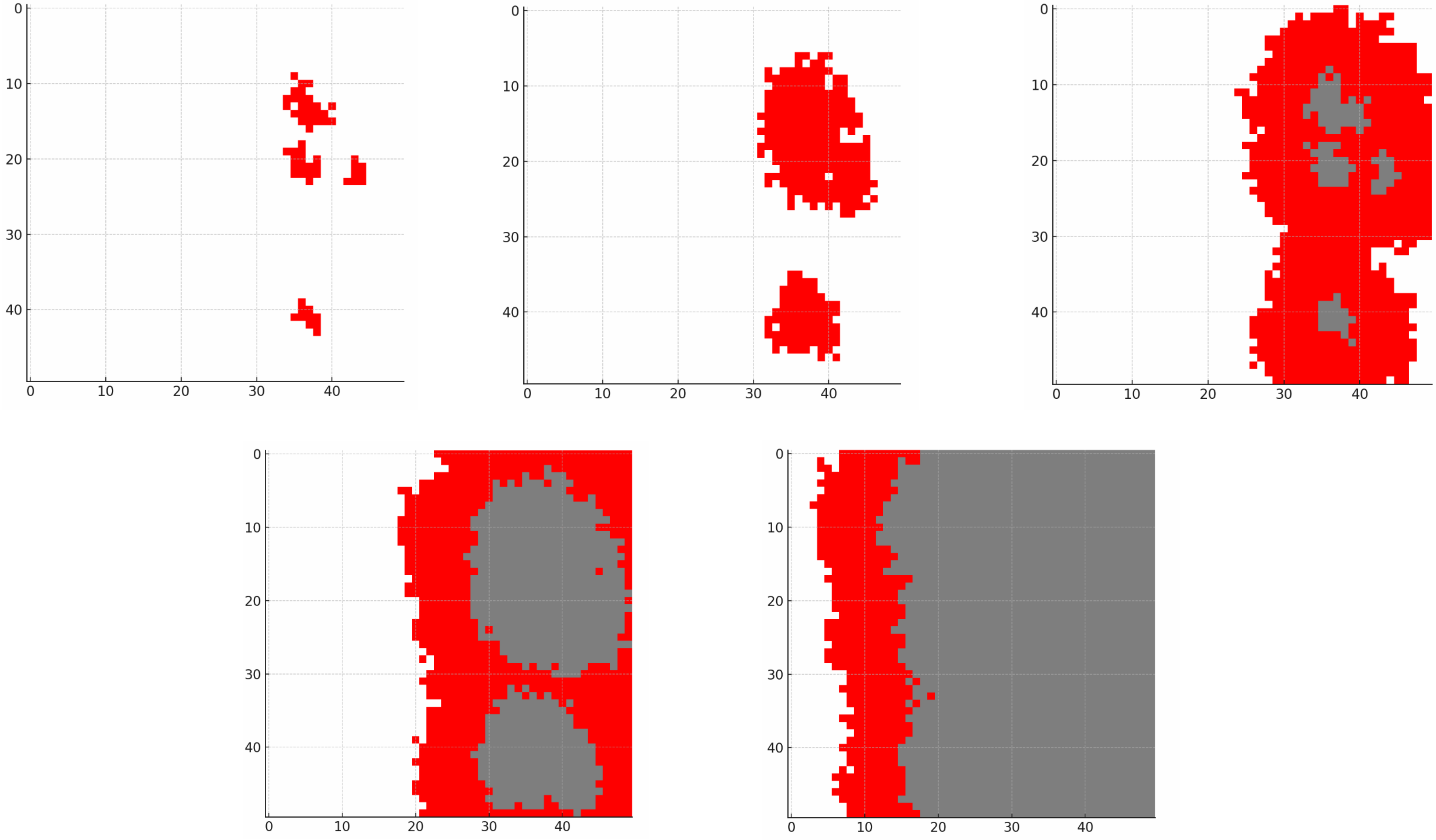
Pour les curieux…Le script python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

# Paramètres du modèle
grid_size = 50
initial_infected = 5
infection_prob = 0.3
recovery_time = 10
time_steps = 50

# États
SUSCEPTIBLE = 0
INFECTED = 1
RECOVERED = 2

# Couleurs pour l'affichage
colors = {
    SUSCEPTIBLE: (1, 1, 1),    # blanc
    INFECTED: (1, 0, 0),       # rouge
    RECOVERED: (0.5, 0.5, 0.5) # gris
}
```

```
# Grille d'états et de temps d'infection
state = np.zeros((grid_size, grid_size), dtype=int)
infection_time = np.zeros((grid_size, grid_size), dtype=int)

# Infection initiale aléatoire
for _ in range(initial_infected):
    x, y = np.random.randint(0, grid_size, 2)
    state[x, y] = INFECTED

# Voisinage (Moore)
def get_neighbors(x, y):
    neighbors = []
    for dx in [-1, 0, 1]:
        for dy in [-1, 0, 1]:
            if dx == 0 and dy == 0:
                continue
            nx, ny = x + dx, y + dy
            if 0 <= nx < grid_size and 0 <= ny < grid_size:
                neighbors.append((nx, ny))
    return neighbors
```

```
# Simulation
frames = []

for t in range(time_steps):
    new_state = state.copy()
    new_infection_time = infection_time.copy()

    for x in range(grid_size):
        for y in range(grid_size):
            if state[x, y] == SUSCEPTIBLE:
                for nx, ny in get_neighbors(x, y):
                    if state[nx, ny] == INFECTED:
                        if np.random.rand() < infection_prob:
                            new_state[x, y] = INFECTED
                            break
            elif state[x, y] == INFECTED:
                new_infection_time[x, y] += 1
                if new_infection_time[x, y] >= recovery_time:
                    new_state[x, y] = RECOVERED
```

```python
    state = new_state
    infection_time = new_infection_time

    frame = np.zeros((grid_size, grid_size, 3))
    for x in range(grid_size):
        for y in range(grid_size):
            frame[x, y] = colors[state[x, y]]
    frames.append(frame)

# Animation
fig = plt.figure(figsize=(6, 6))
im = plt.imshow(frames[0], animated=True)

def updatefig(i):
    im.set_array(frames[i])
    return [im]

ani = animation.FuncAnimation(fig, updatefig, frames=len(frames), interval=200, blit=True)
plt.close(fig)
ani.save("/mnt/data/automate_epidemie.gif", writer="pillow")

"/mnt/data/automate_epidemie.gif"
```


0
10
20
30
40

La modélisation mathématique s’enrichit donc de la notion d’automates

Autre exemple…l’addition automatisée:

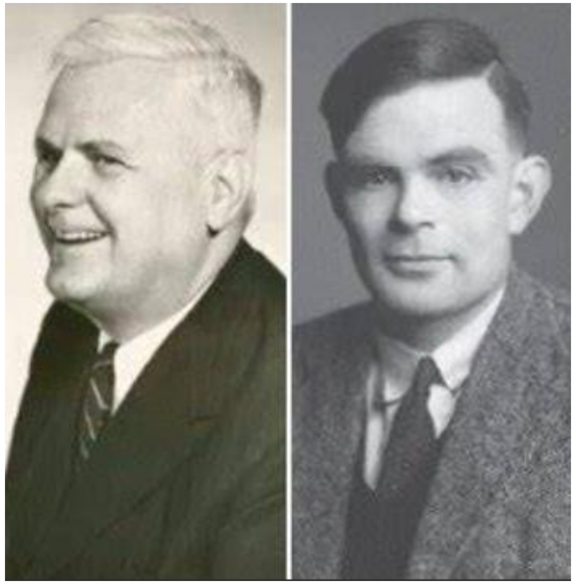
$+y \rightarrow y$ (règle n°1)

$Ix+y \rightarrow x+Iy$ (règle n°2)

$II+III \rightarrow I+IIII$ (règle n°2) puis $I+IIII \rightarrow IIIII$ (règle n°1)

Il s’agit de l’algorithme d’addition !

Remarque : La question « Est-ce que tout problème physique est modélisable par un automate ? » est toujours ouverte. Elle est connue sous le nom de thèse physique de Church-Turing.

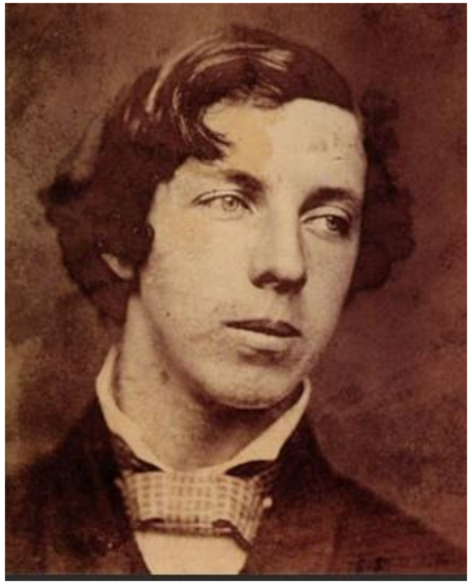


La réponse est positive si on pense que l'univers entier est calculable (Un univers calculable est un univers où **tout ce qui arrive peut être simulé par un algorithme**)

A noter que si l'univers est simulable alors il pourrait bien être simulé, la conscience pourrait n'être qu'un phénomène émergent d'une complexité algorithmique…

Sois valide et tais-toi!

Un problème de Lewis Carroll



$$\begin{array}{rr} & 12345679 \\ \times & 36 \\ \hline = & 444444444 \end{array}$$

Mais comment l'expliquer ?

Première méthode :

Il suffit d’effectuer l’opération ! L’avantage est que c’est simple mais le problème est qu’on ne voit pas si l’apparition des 4 est juste fortuite.

Et cette méthode n’explique pas pourquoi :

$$12345679 \times 18 = 222222222$$

$$12345679 \times 27 = 333333333$$

$$12345679 \times 36 = 444444444$$

$$\vdots$$

$$12345679 \times 99 = 999999999$$

Deuxième méthode : On simplifie par n de chaque côté et on constate que le problème revient à justifier pourquoi la division euclidienne de 111111111 par 9 donne un quotient égal à 12345679. Attention, on dit bien pourquoi et non comment, car pour le « comment », il suffirait d'effectuer le calcul

```
111111111 | 9
 21       |---------
  31      | 12345679
   41     |
    51    |
     61   |
      71  |
       81 |
        0 |
```

En prime, on comprend l'absence du 8 car 81 est divisible par 9

Les démonstrations possèdent un caractère plus ou moins explicatifs, qui sera en retour le point de départ de généralisations plus ou moins importantes !

La validité n'est qu'un aspect parmi d'autres (la concision, la sophistication, le lien avec d'autres propriétés, la portée pédagogique etc.)

Remarque :

Certaines « démonstrations » fausses en disent plus que les vraies !

Que penser de la résolution : y'=ay⇔ $\frac{dy}{dt} = ay$?

Donc $\frac{dy}{y} = adt$

Et ln(y)=at+cste

Soit y=$e^{at+cste} = \mathrm{A}e^{at}$

Alors…

On divise par y sans s'assurer du fait que y pourrait potentiellement s'annuler.

On intègre en ln(y) alors qu'il s'agit de ln$|y|$

Enfin la constant finale A devrait être toujours strictement positive…

Mais elle amène de façon « naturelle » l'exponentielle.

La démonstration valide mais plus « artificielle »

Démonstration : Puisque a est constante, a admet des primitives dont l'expression est ax +cste

Pour y : I→ K dérivable, on définit z par : $z(x) = e^{ax}y(x)$ *(clairement z est dérivable)*

Pour tout x de I : $y'(x) = -ae^{-ax}z(x) + e^{-ax}z'(x)$

Ainsi : $y \in S_0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ y'(x)+ay(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -ae^{-ax}z(x) + e^{-ax}z'(x) + ae^{-ax}z(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-ax}z'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow z' = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, z(x) = \lambda$$

Finalement: $y=\lambda e^{-ax};\ \lambda \in \mathbb{R}$

Les limites des démonstrations

Une limite temporaire :

L’exemple « fameux » du théorème des 4 couleurs :

"Peut-on colorier n'importe quelle carte géographique en utilisant seulement 4 couleurs, de sorte que deux régions adjacentes (ayant une frontière commune, pas juste un point) aient toujours des couleurs différentes ?"

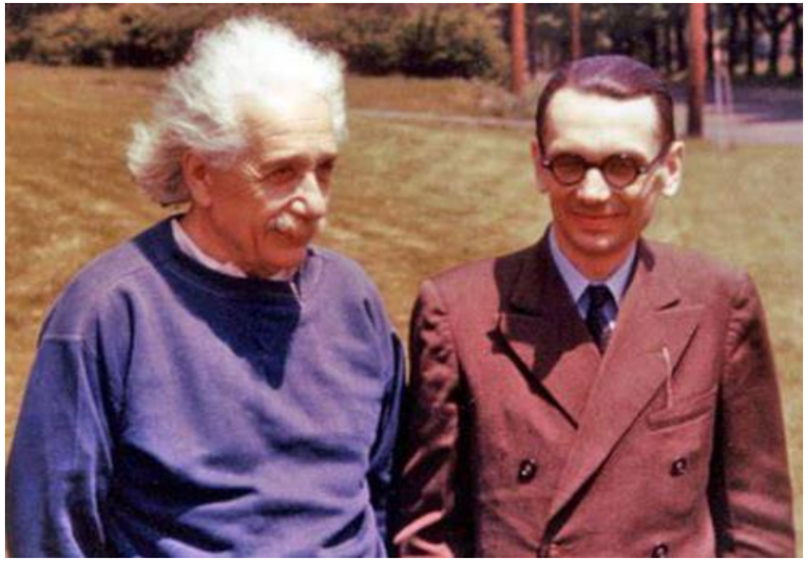
Autrement dit : « 4 couleurs suffisent-elles pour colorier **n'importe quelle division plane en régions connexes**, sans que deux régions voisines partagent la même couleur ? »

La preuve a été obtenue informatiquement, elle correspond à des milliers de lignes de codes. Ces lignes ont-elles mêmes été validées par des algorithmes !

Appel et Haken,
Pionniers dans la
résolution informatique
du problème des 4 couleurs

Une limite épistémologique :

Le **théorème d'incomplétude de Gödel** (1931) montre une limite fondamentale des mathématiques. Il dit que dans tout système logique assez puissant pour inclure l'arithmétique (comme celui utilisé en mathématiques), **il existera toujours des propositions vraies, mais impossibles à démontrer à l'intérieur de ce système**.



Pour comprendre le principe de la démonstration de Gödel …

Il était une fois un petit robot très intelligent, appelé **Gödéo**.
Gödéo était programmé pour **prouver des choses vraies**. Il avait une immense bibliothèque avec toutes les règles de logique et de mathématiques.

Un jour, Gödéo dit fièrement :

"Si quelque chose est vrai, je trouverai une démonstration !"

Mais un vieux sage vint lui poser une énigme :

"Voici une phrase ; *Cette phrase ne peut pas être prouvée par Gödéo.*
Que peux-tu dire d'elle ?"

Gödéo réfléchit…

Le robot comprit alors :

"Il existe des phrases vraies… que je ne peux jamais prouver."
"Même moi, avec tous mes programmes logiques, j'ai des limites."