Colle sur le chapitre n°17 « Dérivabilité»

En vrac : vrai ou faux ?

1) Une fonction peut avoir un extremum en un point sans que sa dérivée s'annule.
2) Toute fonction dérivable à droite et à gauche en a est dérivable en a
3) Le théorème de Rolle entraîne qu'une fonction polynomiale de degré 3 change trois fois de signe.
4) Si la dérivée d'une fonction s'annule en un point, cette fonction admet un extremum en ce point.

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{sh(x)} \ si\ x \neq 0 \\ 1\ sinon \end{cases}$

1) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser f '(0)
2) Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et préciser f '(x)
3) La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°2

1) Montrer que pour tous réels x,y : $|\cos(y) - \cos(x)| \leq |y - x|$
2) Soit n$\in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tous réels x,y de [-1,1] : $|y^n - x^n| \leq n|y - x|$

Exercice n°3

Soient f et g deux fonctions de [a,b]→ $\mathbb{R}$ continues sur [a,b], dérivables sur]a,b[telles que $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$

1) Montrer que g(b) ≠g(a)
2) Montrer : $\exists c \in]a, b[, \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice n°4

Soit P$\in \mathbb{R}[X]$ tel que dep(P)≥ 2

1) Montrer que si les zéros de P sont tous réels et simples alors il en est de même pour P'
2) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire décomposable en produit de polynômes de degré 1) alors P' est également scindé sur $\mathbb{R}$

Problème :

Rappels : Pour x réel, on définit : $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$; $sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et $th(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

1) Justifier que $ch(x) \sim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2}$
2) Déterminer **en justifiant** l'équivalent de sh(x) en 0
3) Etudier la fonction x→th(x) (*c'est-à-dire construire, en justifiant son tableau de variations)*
4) Etablir que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
5) Exprimer la dérivée de th en fonction de th
6) On désigne par argth la réciproque de th
   a) Justifier que argth soit impaire
   b) Démontrer que argth est dérivable
   c) Calculer la dérivée de argth