Colle sur le chapitre n°18 « DL»

En vrac : vrai ou faux ?

1) Une fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0 si et seulement si f est dérivable en0
2) Le DL à l'ordre 4 en 0 de fg est le produit des DL à l'ordre 2 de f et de g
3) Comme $e^u = 1 + u + o(u), alors\ e^{\cos(x)} = 1 + \cos(x) + o(\cos(x))$
4) Le DL à l'ordre 1 en 0 de $(1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$ est 1+x+o(x)

Exercice n°1

Déterminer les DL en 0 de :

1) $\frac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 2   2) $\sin^2(x)$ à l'ordre 6   3) $\frac{\cos(x)}{(1+x)^2}$ à l'ordre 4

Exercice n°2

Déterminer le DL en 0 à l'ordre 2 :

1) $\sqrt{1 + \sin(x)}$ 2) $\ln(\frac{1}{2} + \frac{e^x}{2})$

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

1) Donner le DL en 0 à l'ordre 2 de f
2) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0
3) Préciser la position de la tangente précédente par rapport à la courbe de f
4) Montrer que $f(x) =_{+\infty} x + 1 + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})$

Exercice n°4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^{x^2}$

1) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
2) Justifier que f^{-1} admet un DL à l'ordre 4 en 0
3) Donner alors son développement limité

Problème :

On définit une suite v_n définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{n + v_n}$

1) Montrer que $\forall n \geq 1, \sqrt{n-1} \leq v_n \leq 2\sqrt{n}$
2) En déduire que $v_n = O(\sqrt{n})$
3) Montrer que $v_n \sim_{+\infty} \sqrt{n}$
4) Montrer que $v_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$ pour n tendant vers $+\infty$