

En vrac : vrai ou faux ?

- 1) Si A et B sont semblables alors pour tout entier p, A^p et B^p sont semblables
- 2) Si A et B sont semblables alors elles sont équivalentes.
- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, alors $\text{rang}(A) \leq \min(n,p)$
- 4) Toute matrice carrée est équivalente à une matrice diagonale

Exercice n°1

Calculer les produits AB et BA lorsque c'est possible :

- 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice n°2

A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice n°3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et U_n une suite de $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$
- 2) Préciser U_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

Exercice n°4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer A^2 et vérifier qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^2 = aA + bI_3$
- 2) Montrer que A est inversible et préciser son inverse .
- 3) Déterminer $(A - I_3)(A - 2I_3)$, les matrices $A - I_3$ et $A - 2I_3$ sont-elles inversibles ?

Problème : Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2a & a & a \\ a & 1 - 2a & a \\ a & a & 1 - 2a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\}$

- 1) Montrer que pour tous réels a,b le produit $M(a)M(b) \in E$
- 2) En déduire toutes les valeurs de a pour lesquelles $M(a)$ est inversible et exprimer alors son inverse.
- 3) Déterminer le réel a_0 non nul tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$
- 4) Soit $P = M(a_0)$ et $Q = I_3 - P$
 - a) Montrer qu'il existe un unique réel α , que l'on exprimera en fonction de a, tel que : $M(a) = P + \alpha Q$
 - b) Exprimer P^2, PQ, Q^2
 - c) Soit n un entier naturel non nul, exprimer $M(a)^n$ en fonction de a