Colle sur le chapitre n°20 « Déterminant»

<u>En vrac : vrai ou faux ?</u>

1) Si le produit de deux matrices carrées est inversible alors chacune des matrices est inversible.
2) Si A est une matrice carrée de taille n alors A^2 a un déterminant positif ou nul
3) La formule det(AB)=det(BA) n'est valable que pour les matrices carrées A et B qui commutent.
4) La comatrice d'une matrice A est inversible si et seulement si A est inversible

<u>Exercice n°1</u>

Calculer le déterminant de : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Exercice n°2</u>

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par f(P) = XP'(X+2)+P(1)$(X^3 - 1)$

1) Montrer que f est bien définie et linéaire
2) Calculer det(f)
3) L'application f est-elle un automorphisme ?

<u>Exercice n°3</u>

Pour tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit le déterminant de Vandermonde par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1) Calculer V(a,b,c) sous forme factorisée
2) Calculer V(ab,c,d) sous forme factorisée
3) Exprimer V$(a_1, \dots, a_n)$ en fonction de V$(a_2, \dots, a_n)$
4) En déduire une formule générale pour V$(a_1, \dots, a_n)$

<u>Exercice n°4</u>

Soit A=$X^3 - X^2 - X + 2$ et B = $X^3 - 3X^2 + 2X$

Pour tout P$\in \mathbb{R}_2[X]$, on note f(P) le reste de la division euclidienne de AP par B

1) Montrer que f$\in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$
2) Déterminer la matrice M représentative de f dans la base canonique
3) Montrer que f est un automorphisme

<u>Problème :</u>

Les deux questions sont indépendantes :

1) Soit A= $\begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{pmatrix}.$
   a) Exprimer det(A) comme une somme de déterminants
   b) En déduire det(A)

2) Soit $D_n =$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$
   a) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ *pour n entier naturel non nul*
   b) Exprimer alors D_n en fonction de n
   c) Vérifier la formule pour n=3