Colle sur le chapitre n°21 **« Séries»**

En vrac : vrai ou faux ?

1) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ $alors$ $\sum u_n$ converge
2) Si $\lim_{n\to+\infty} nu_n = -\infty$ $alors$ $\sum u_n$ diverge
3) Si $\sum(u_n + v_n)$ converge alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$
4) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exercice n°1

Etablir la convergence des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
2) $\sum Arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$
3) $\sum (n^2 + n + 1)e^{-n}$

Exercice n°2

Déterminer la nature des séries suivantes, et pour celles convergentes, donner la valeur de la somme :

1) $\sum \frac{n}{(n+1)!}$
2) $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
3) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Exercice n°3

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ dont on note H_n la somme partielle d'ordre n

1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$
2) On note $u_n = H_n - \ln(n)$, $en\ étudiant\ la\ série$ $\sum(u_{n+1} - u_n)$, montrer que la suite (u_n) converge

Exercice n°4

On s'intéresse à la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{nln(n)}$

1) Déterminer la monotonie de la fonction x→ $\frac{1}{xln(x)}$ sur]1,+∞[
2) Pour k∈ $[\![2, +\infty]\!]$, minorer $\frac{1}{kln(k)}$
3) En déduire la nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{nln(n)}$

Problème :

On pose $\xi : a \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

1) Justifier que ξ est bien définie sur]1,+∞[
2) A l'aide d'une comparaison série-intégrale, encadre ξ(a) pour a∈]1,+∞[
3) En déduire un équivalent simple de ξ en 1^+
4) Déterminer la limite, si elle existe, de ξ en $+\infty$