

Ex 3 : Corde de Melde

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Rq : $T \nearrow$ alors $c \nearrow$
 $\mu \nearrow$ alors $c \searrow$ (facteur inertiel)

⚠ Longueur de corde L ! Dans l'ex 2 c'était $2L$

$$L \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad f_n = \frac{nc}{2L}$$

$$a) \quad f_2 = \frac{2c}{2L} \quad \text{et} \quad f_3 = \frac{3c}{2L}$$

on voit que $f_2 = 2f_1$ et $f_3 \approx 3f_1$ avec $f_1 = 9,5 \text{ Hz}$

donc $f_n = n \times f_1$ pour les harmoniques suivantes.

$$b) \quad \text{Prenons } f_2 = \frac{2c}{2L}, \quad \text{on trouve } c = f_2 \times L$$

$$\text{soit } c = 22,2 \text{ m.s}^{-1}$$

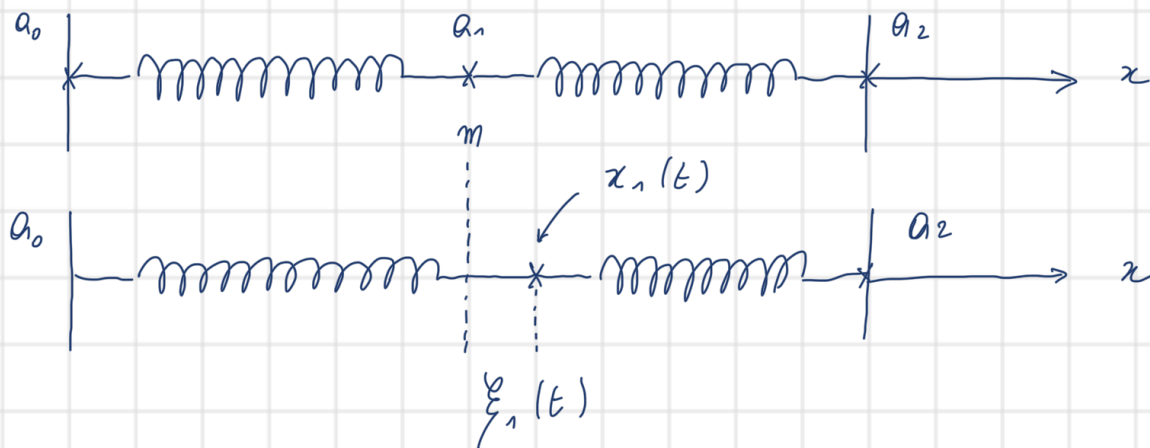
$$c) \quad P = M \times g = 0,025 \times 9,8 = 0,245 \text{ N}$$

$$T = P = 0,245 \text{ N} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{T}{c^2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}$$

Ex 4 : Une masse et deux ressorts.

1° On note $\xi_0(t)$, $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ les petits déplacements de a_0 , a_1 et a_2

Les extrémités a_0 et a_2 sont fixes donc $\xi_0(t) = \xi_2(t) = 0$



$$x_1(t) = a_1 + \xi_1(t) \quad \text{d'où} \quad \xi_1(t) = x_1(t) - a_1$$

2° Ressort 1 : $+\xi_1(t)$

Ressort 2 : $-\xi_1(t)$

$$3° \vec{F}_1^- = -k(l + \xi_1(t) - l) = -k\xi_1(t) (\vec{u}_x)$$

$$4° \vec{F}_1^+ = -k(l - \xi_1(t) - l) = +k\xi_1(t) (-\vec{u}_x)$$

$$5° \text{ PFD : } m \vec{a} = \sum \vec{f}_{\text{ext}}$$

$$m \frac{d^2 \xi_1(t)}{dt^2} \vec{u}_x = -2k \xi_1(t) \vec{u}_x$$

situation analogue à un
ressort unique de
constante $2k$

$$6° \text{ Projection : } \frac{d^2 \xi_1(t)}{dt^2} + \omega^2 \xi_1(t) = 0$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

7° Solution du type : $\xi_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$t = 0 \quad \xi_1(0) = u = A \cos \varphi$$

$$\dot{\xi}_1(0) = 0 = -A\omega \sin \varphi$$

$$\text{donc } \varphi = 0 \text{ et } A = u$$

$$\xi_1(t) = u \cos(\omega t)$$

Ex 5

1° Transformation isentropique : on néglige les phénomènes dissipatifs comme la conduction thermique (adiabatique) ou les phénomènes de viscosité (réversible)

$$2° \text{ PFD : } \rho S_0 dx \frac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} = P(x,t) S_0 \vec{e}_x - P(x+dx, t) S_0 \vec{e}_x$$

$$\rho_0 S_0 dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} S_0 dx \quad \text{en projection}$$

approx acoustique

$$\longrightarrow \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = - \rho \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

$$3° \quad \frac{\delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\chi_s = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$$

$$\text{donc } \frac{\delta V}{V} = - \chi_s \delta P$$

sera notée $p(x,t)$
surpression acoustique

$$p(x,t) = - \frac{1}{\chi_s} \left(\frac{\delta V}{V} \right) = - \frac{1}{\chi_s} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)$$

$$\text{en dérivant par } t : \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_s} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)$$

4° On dérive $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right) \\ &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) \\ &= \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}\end{aligned}$$

5° $PV^\gamma = \text{constante}$

$$d(\ln P) + \gamma d(\ln V) = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

$$\text{donc pour de petites variations : } \frac{\delta V}{V} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\delta P}{P}$$

$$\text{avec} \quad \chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$$

$$\text{on obtient : } \frac{\delta V}{V} = -\chi_s \delta P$$

à l'aide de ces deux expressions de $\frac{\delta V}{V}$ il vient :

$$-\chi_s \cancel{\delta P} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\cancel{\delta P}}{P}$$

$$\text{et donc} \quad \chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (P = P_0 \text{ à l'équilibre})$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma P_0}}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

Ex 6

$$1^{\circ} \quad v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -U_0 \omega \sin(\omega t - kx) \quad (\omega = kc)$$
$$= v_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

en écriture complexe $\underline{v}(x, t) = v_0 e^{j\omega t} e^{-jkx} e^{j\varphi}$

La surpression obéit à l'équation de d'Alembert, on peut donc écrire :

$$p(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\underline{p}(x, t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)} = p_0 e^{j\omega t} e^{-jkx}$$

PFD sur la tranche de fluide de l'Ex 5

$$\rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

$$\rho_0 (j\omega) \underline{v}(x, t) = - (-jk) \underline{p}(x, t)$$

on en déduit $\underline{Z} = \frac{j\rho_0 \omega}{jk}$

L'impédance acoustique est donc une grandeur réelle :

$$Z = \rho_0 c \quad (\omega = kc)$$

AN : $Z = \rho_{\text{air}} \times c = 1,3 \times 340 = 4,4 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

2. Gaz : ρ faible / c moyen

$$2^{\circ} \quad \rho_{\text{gaz}} < \rho_{\text{liquide}} < \rho_{\text{solide}}$$

$$c_{\text{gaz}} < c_{\text{liquide}} < c_{\text{solide}}$$

$$\text{d'où } Z_{\text{gaz}} < Z_{\text{liquide}} < Z_{\text{solide}}$$

3° Dans une conduite de section S_0 , on applique la conservation du débit $S_0 \times v$ et non de la vitesse v

$$Z_c = \frac{\rho(x,t)}{S_0 v(x,t)}$$

↑
conduite

$$Z_c = \frac{\rho_0 c}{S_0}$$

$$4^{\circ} \quad k = \omega/c \quad (\text{Voir Ex 5}) \quad \text{pulsation spatiale}$$

$$\text{Voir question 1}^{\circ} \quad Z = \rho_0 c = \frac{\rho_0}{v_0}$$

$$\text{d'où } \rho_0 = \rho_0 c v_0 = \rho_0 c v_m \omega$$

$$5^{\circ} \quad I = \langle p \times v \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\underline{p} \times \underline{v}^*)$$

$$\text{En prenant les amplitudes } I = \frac{1}{2} P_m v_0$$

$$Z = P_m / v_0$$

$$\text{d'où } I = \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{Z} \quad (\text{en } \text{W} \cdot \text{m}^{-2})$$



$$6^{\circ} \quad \langle P \rangle = I \times S_0 = \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{Z} S = \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{Z_c}$$

Ex 7

$$1^\circ \quad Z = \frac{p_i(x, t)}{v_i(x, t)} \quad \text{et} \quad v_i(x, t) = \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t}$$

$$p_i(x, t) = P_{im} \cos \omega(t - x/c_1)$$

$$v_i(x, t) = \frac{P_{im}}{Z} \cos \omega(t - x/c_1)$$

par intégration on obtient $u_i(x, t) = \frac{P_{im}}{Z\omega} \sin \omega(t - x/c_1)$

$$u_i(x, t) = U_{im} \cos[\omega(t - x/c_1) - \pi/2]$$

avec $U_{im} = P_{im}/Z\omega = P_{im}/\rho_1 c_1 \omega$

$$2^\circ \quad I = \langle p \times v \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{p} \underline{v}^*)$$

en prenant les amplitudes on obtient : $I = \frac{1}{2} P_m v_m$

de plus $Z = \frac{P_m}{v_m}$ donc $I = \frac{P_m^2}{2Z}$

$$\langle P \rangle = I \times S = \frac{P_m^2 S}{2Z} = \frac{P_m^2}{2Z_0}$$

Pour les 3 ondes (incidente, réfléchi et transmis) :

$$\langle P_i \rangle = \frac{P_{im}^2}{2Z_{a1}} ; \quad \langle P_r \rangle = \frac{P_{rm}^2}{2Z_{a1}} ; \quad \langle P_t \rangle = \frac{P_{tm}^2}{2Z_{a2}}$$

3° 1) Continuité de la pression : $P_{im} + P_{rm} = P_{tm}$ (1)

2) Continuité du débit volumique :

$$\left. \begin{array}{l} D_v = S \times v_m \\ Z = P_m / v_m \end{array} \right\} D_v = \frac{S P_m}{Z} = \frac{P_m}{Z a}$$

$$\frac{P_{im}}{Z_{a1}} - \frac{P_{rm}}{Z_{a1}} = \frac{P_{tm}}{Z_{a2}} \quad \text{d'où} \quad P_{im} - P_{rm} = \alpha P_{tm} \quad (2)$$

sens opposé du débit

avec $\alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}$

4° $r_p = \frac{P_r(0, t)}{P_i(0, t)} = \frac{P_{rm}}{P_{im}}$ et $t_p = \frac{P_t(0, t)}{P_i(0, t)} = \frac{P_{tm}}{P_{im}}$

(1) + (2) : $2 P_{im} = (1 + \alpha) P_{tm}$ d'où $t_p = \frac{2}{1 + \alpha}$

$\alpha(1)$: $\alpha P_{im} + \alpha P_{rm} = \alpha P_{tm}$

d'où $r_p = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$

(2) : $P_{im} - P_{rm} = \alpha P_{tm}$

5° $R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right|$ et $T = \left| \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} \right|$

$$R = \frac{P_{rm}^2 / 2 Z_{a1}}{P_{im}^2 / 2 Z_{a1}} = \frac{P_{rm}^2}{P_{im}^2} = r_p^2 = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2$$

$$T = \frac{P_{tm}^2 / 2 Z_{a2}}{P_{im}^2 / 2 Z_{a1}} = \frac{P_{tm}^2}{P_{im}^2} \times \alpha = \alpha t_p^2 = \alpha \left(\frac{2}{1 + \alpha} \right)^2$$

$R + T = 1$: Conservation d'énergie (pas d'absorption dans l'interface)

$$R + T = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 + \alpha \left(\frac{2}{1 + \alpha} \right)^2 = 1$$

Conservation d'énergie (pas d'absorption dans l'interface)

6° $Z_{\text{corps 1}} \gg Z_{\text{air}}$ alors $\alpha \gg 1$

* Amplitude de réflexion : $r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \approx -1$

L'amplitude réfléchi est presque égale à l'amplitude incidente mais de signe opposé (phase π)

* Amplitude de transmission : $t = \frac{2}{1 + \alpha} \approx 0$

* Coefficients en puissance : $R = r^2 \approx 1$

$$T = \alpha t^2 = \alpha \frac{4}{(1 + \alpha)^2} \approx \frac{4}{\alpha} \ll 1$$

Donc presque toute la puissance est réfléchi ($R \approx 1$) et très peu transmise ($T \ll 1$)

Interprétation :

L'interface corps humain $\rightarrow$ air est très mal adapté (forte différence d'impédances).

Nécessité d'un stéthoscope pour améliorer l'adaptation d'impédance.

$$T_{\text{dB}} = 10 \log T = -28 \text{ dB}$$

7° Pour un même fluide (ρ et c identiques de part et d'autre) :

$$Z_{a1} = \frac{\rho c}{S_1} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{\rho c}{S_2}$$

$$\alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}} = \frac{S_2}{S_1}$$

Coeff de réflexion en puissance s'écrit : $R = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2$

Remarques :

* $\alpha = 1$ ($S_1 = S_2$) on a $R = 0$ et $T = 1$,

l'adaptation d'impédance est parfaite (pas de réflexion).

C'est le cas idéal où la section est continue.

* $S_1 \gg S_2$ alors $\alpha \ll 1$: $R \approx 1$, presque toute

l'énergie est réfléchi.

* $S_1 \ll S_2$ alors $\alpha \gg 1$: $R \approx 1$, là aussi presque toute

l'énergie est réfléchi.