La théorie du Chaos

Les faits, papillon!

I. L’effet papillon

« C’est l’effet papillon : petite cause, grande conséquence
Pourtant jolie comme expression, petite chose, dégât immense »

Bénabar (L’effet papillon)

"Un papillon cause une tornade" : C'est la plus grande erreur. Le papillon **ne cause pas** la tornade. Il ne fait que déplacer le système météorologique d'une trajectoire vers une autre, parmi un nombre infini de trajectoires possibles. Dans l'une, il n'y a pas de tornade. Dans l'autre, il y en a une. Le papillon est juste la "perturbation" qui a fait passer le système d'une trajectoire à l'autre.

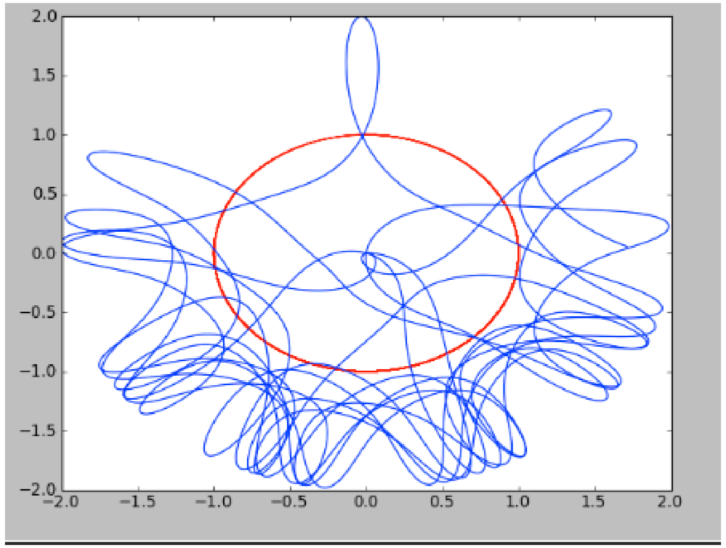
L'effet papillon n'est pas de la magie ou du surnaturel : C'est un phénomène purement déterministe et mathématique. Il n'y a pas de "cause à effet" directe au sens habituel, mais une **sensibilité extrême aux conditions initiales** qui rend les prévisions impossibles à long terme.

L'effet papillon n'est pas de l'aléatoire : Le système chaotique n'est pas aléatoire. Si on connaissait parfaitement les conditions initiales (à la précision infinie), on pourrait prédire parfaitement le résultat. Le problème, c'est que cette précision parfaite est impossible à obtenir dans la réalité.

"Tout est chaos et imprévisible" : Faux. L'effet papillon ne concerne que les systèmes chaotiques. De nombreux systèmes sont stables et ne présentent pas cette sensibilité. Par exemple, la trajectoire d'un pendule simple est très prévisible, même avec de légères variations initiales.

Sensibilité aux conditions initiales : Le pendule double est l'une des meilleures illustrations de l'effet papillon.

- Lâchez le pendule d'un angle initial précis. Il suivra une trajectoire.
- Lâchez-le d'un angle à peine un degré (ou même moins) à côté, et la trajectoire de l'extrémité du second pendule sera **totalement différente et imprévisible** après seulement quelques secondes.
- La moindre variation dans l'angle, la longueur des bras ou la masse des pendules entraîne une divergence exponentielle des trajectoires.



La théorie du chaos est l'étude de systèmes dynamiques qui, malgré des règles déterministes (non aléatoires), sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

Le chaos n'est pas un désordre total. **C'est un désordre déterministe : la connaissance des conditions initiales ne suffit pas à prédire le comportement à long terme.**

Jeff Goldblum jouant le rôle d'un mathématicien draguant avec la théorie du chaos

II. Les situations connues au lycée

Équation du second degré

On s'intéresse aux deux équations du second degré suivantes :

- Équation A : $x^2 - 2x + 1 = 0$
  → discriminant $= 0$. Racine double réelle : $x = 1$.
- Équation B : $x^2 - 2x + 1.000001 = 0$
  → discriminant $\approx -4 \times 10^{-6}$. Pas de racines réelles (racines complexes proches de $1 \pm i\,10^{-3}$).

Le problème vient du fait que le discriminant est égal à 0 dans le premier cas mais est légèrement négatif dans le second.

Les ordinateurs représentent les nombres avec un nombre limité de chiffres significatifs (en binaire). Quand on soustrait deux grands nombres très proches, la partie « utile » s’annule, et ce qui reste est « amplifié » par les erreurs de calcul.

Exemple simple :
Pour un ordinateur sachant représenter 7 chiffres significatifs,

$1.234567 \times 10^3 - 1.234566 \times 10^3 = 0.0010000$

Les 6 premiers chiffres se sont **annulés** et l’arrondi fait perdre beaucoup de précision.

Système d'équations

Considérons les deux systèmes d'équations suivants :

$$S_1\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2{,}0001x + y = 3{,}0001 \end{cases} \text{ et } S_2\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2{,}0001x + 2y = 3{,}0002 \end{cases}$$

On constate que ces systèmes sont « très proches ».

Symbolab

Solutions Graphisme Calculateurs Géométrie Outils

Pré-algèbre Algèbre Pré calculs Calculs Fonctions Algèbre linéaire Trigonométrie Statistiques Chimie Economie Conversions

Solutions > Calculateur de systèmes d'équations linéaires > 2x+y=3, 2.0001x+y=3.0001

Sujet

Algèbre

Equations

Inéquations

Système d'équations

$2x+y=3,\ 2.0001x+y=3.0001$

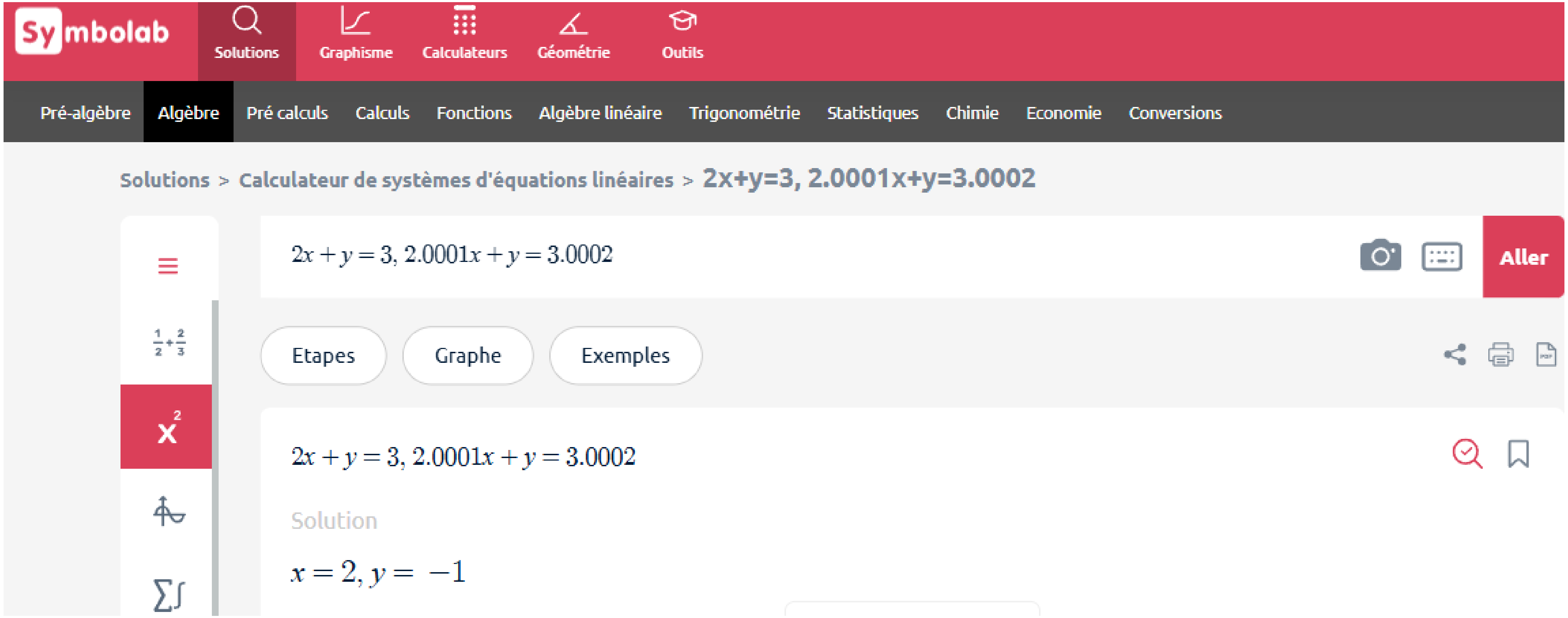
Aller

Etapes Graphe Exemples

$2x+y=3,\ 2.0001x+y=3.0001$

Solution

$x=1,\ y=1$


Symbolab
Solutions
Graphisme
Calculateurs
Géométrie
Outils
Pré-algèbre
Algèbre
Pré calculs
Calculs
Fonctions
Algèbre linéaire
Trigonométrie
Statistiques
Chimie
Economie
Conversions
Solutions > Calculateur de systèmes d'équations linéaires > 2x+y=3, 2.0001x+y=3.0002
$2x+y=3, 2.0001x+y=3.0002$
Aller
Etapes
Graphe
Exemples
$2x+y=3, 2.0001x+y=3.0002$
Solution
$x=2, y=-1$

Problème du conditionnement

Imaginons deux tabourets, le premier repose sur 3 pieds et le second sur 4 pieds.

On décide de scier au hasard les pieds de ses tabourets (mais pas au ras du support de l’assise).

Dans le premier cas, le tabouret restera debout, le système est peu sensible aux longueurs des pieds en entrée, il est bien « conditionné »

Dans le deuxième cas, le tabouret a de fortes probabilités de s’écrouler…Le système est « mal conditionné »

C’est exactement le problème pour les équations étudiées !

En termes mathématiques, le **conditionnement** d'un problème est une mesure de sa **sensibilité aux perturbations**. Plus précisément, il s'agit du rapport entre l'erreur relative dans la solution (la sortie) et l'erreur relative dans les données (l'entrée).

Equation logistique

L'équation logistique est un modèle mathématique simple qui décrit la croissance d'un système dans un environnement avec des ressources limitées : $x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$

- x_n représente la population (normalisée entre 0 et 1) à l'année n.
- r est le taux de croissance (ou paramètre de contrôle qu'on ajuste selon l'hypothèse retenue)

Un exemple précis pour comprendre l'équation logistique

- **Domaine :** L'écologie et la dynamique des populations.
- **Exemple :** La population de saumons dans un lac où les ressources (nourriture, espace) sont limitées.
  - x_n : la population de saumons une année donnée (par exemple, 0,5 signifie que le lac est rempli à 50% de sa capacité maximale). La valeur est comprise entre 0 et 1
  - r : le taux de reproduction du saumon.

L'équation logistique simule l'évolution de cette population année après année :

- Le terme $r \cdot x_n$ correspond à la croissance naturelle (plus il y a de poissons, plus la population grandit).
- Le terme $(1 - x_n)$ correspond à la limitation des ressources (plus la population est grande, plus la croissance ralentit).

Croissance et stabilisation (1<r<3)

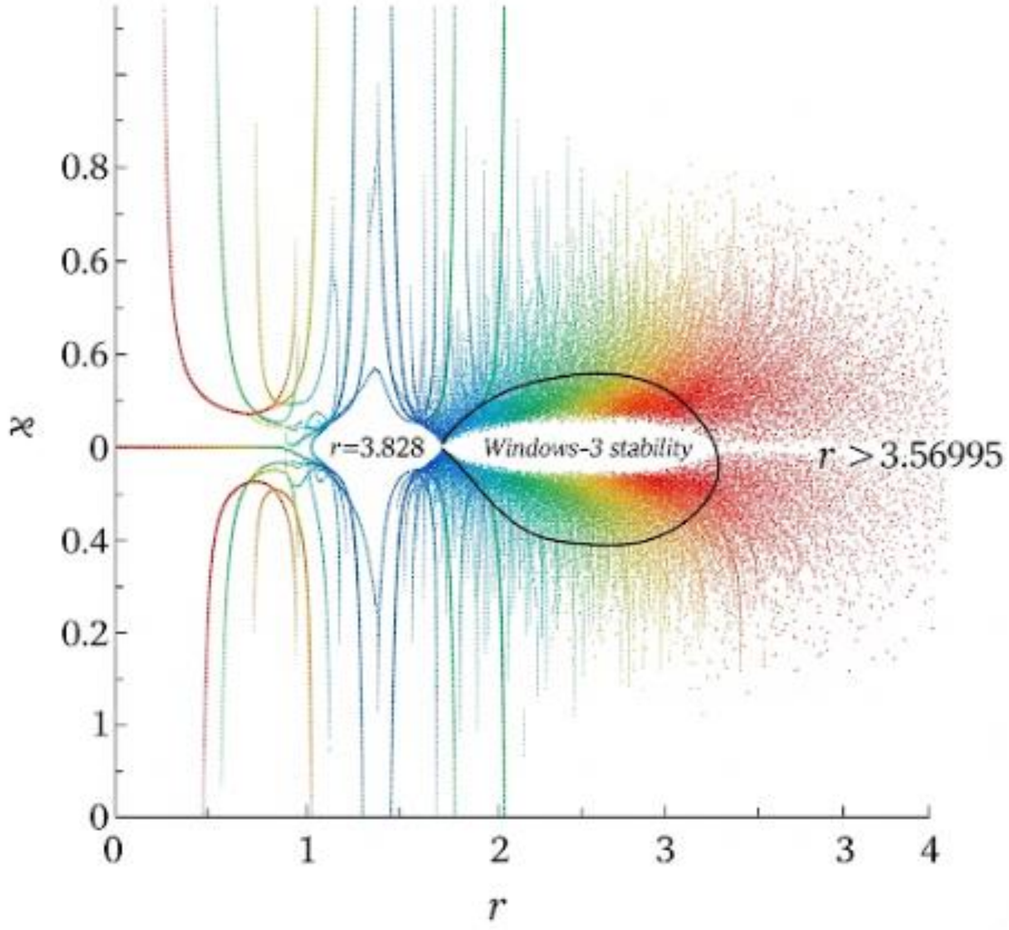
- Si r est petit, le taux de croissance est modéré.
- La population augmente d'abord, puis se stabilise sur une **valeur d'équilibre unique**. Le système est prévisible.
- *Exemple :* Si r=2.5, la population tend vers 0.6.

Bifurcation et oscillation périodique (3<r<3.57)

- Lorsque r dépasse la valeur 3, la population ne peut plus se stabiliser sur une seule valeur.
- Elle se met à **osciller entre deux valeurs** différentes.
- En augmentant encore r, elle oscille entre 4 valeurs, puis 8, puis 16, etc. C'est le phénomène de la **bifurcation de période**. Le système est encore prévisible, mais son comportement est plus complexe.

L'entrée dans le chaos (r>3.57)

- Au-delà de r≈3.57, les bifurcations s'accélèrent et s'enchaînent jusqu'à l'infini.
- La population ne se stabilise plus sur un nombre fini de valeurs. Elle semble prendre des valeurs aléatoires.



En résumé:
•Le comportement prévisible vient de l'existence de **points fixes stables**.

•Le chaos vient de la **perte de stabilité**, ce qui « force » le système à explorer un ensemble infini de valeurs sans jamais se répéter.

III. Un peu d'histoire

Poincaré

Jusqu'à la fin du XIXe siècle, les scientifiques croyaient que les systèmes physiques étaient soit parfaitement périodiques (comme les planètes qui tournent), soit aléatoires. Henri Poincaré a remis en cause cette idée en s'attaquant à un problème célèbre : le **problème à trois corps**.

- **Le problème à deux corps :** La trajectoire de deux corps (par exemple, le Soleil et la Terre) en interaction gravitationnelle est une ellipse parfaite et prévisible. Les équations de Newton peuvent être résolues analytiquement.

- **Le problème à trois corps :** Ajoutez un troisième corps (par exemple, la Lune), et le système devient incroyablement complexe. Le problème consiste à prédire les trajectoires de ces trois corps sous l'effet de leur attraction mutuelle.

- **Les équations :** Le mouvement est régi par les équations différentielles de Newton. Pour trois corps, il s'agit d'un système de 18 équations différentielles (3 coordonnées de position et 3 de vitesse pour chaque corps). Poincaré a montré qu'il était **impossible de trouver une solution générale** et simple pour ces équations.

Les équations du mouvement : Pour chaque corps, la seconde loi de Newton (F=ma) nous donne un système d'équations différentielles pour chaque dimension spatiale. Si on note $r_i=(x_i,y_i,z_i)$ le vecteur position du corps i, les équations sont :

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (r_j - r_i)}{\|r_j - r_i\|^3}$$

Le point de non-retour : Poincaré a démontré qu'il n'existe pas de solution générale analytique (c'est-à-dire une formule simple) pour ce système. C'est le premier résultat majeur qui a secoué le monde scientifique de l'époque. Cela signifie que même si les lois de la physique sont parfaitement connues, la solution ne peut pas être écrite simplement.

L'approche de Poincaré (l'espace des phases) : Au lieu de chercher une formule, il a utilisé une approche géométrique. Il a considéré un espace mathématique de 12 dimensions où chaque point représente l'état instantané du système (la position et la vitesse des trois corps). La solution est alors une courbe unique et continue dans cet espace.

Quel est le rapport avec la théorie du chaos ?

La non-linéarité : L'élément clé des équations qui mène au chaos sont les termes au carré des distances entre les corps. C'est cette non-linéarité qui crée la complexité du système.

La sensibilité aux conditions initiales : C'est le résultat le plus spectaculaire de Poincaré:

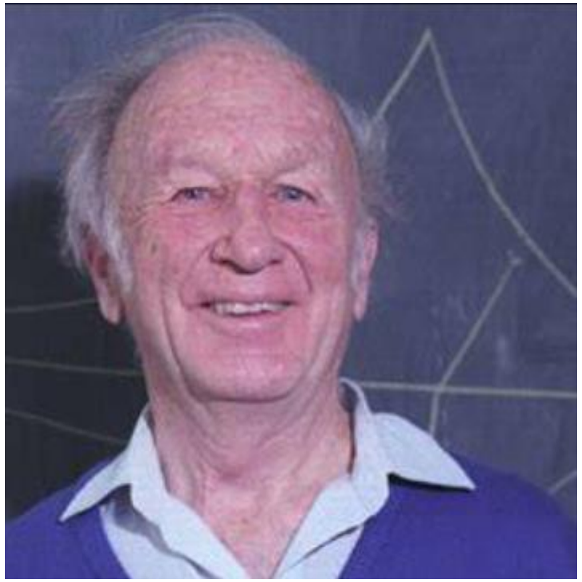
Imaginons deux trajectoires, l'une partant de conditions initiales I et l'autre de I′ (**à peine un millimètre à côté de I**).

Au début, les deux trajectoires sont proches. Mais en s'engouffrant dans la zone d'entremêlement des orbites, elles se retrouvent sur des boucles complètement différentes.

La distance entre les deux trajectoires diverge alors de manière exponentielle : **le système est imprévisible à long terme**

Lorenz

Qui est Edward Lorenz ? C'est un météorologue et mathématicien américain. Dans les années 1960, il travaillait sur la prévision météorologique, un problème qui était alors considéré comme difficile mais solvable.



Le modèle : Il a créé un modèle informatique simplifié de l'atmosphère, basé sur seulement **trois équations différentielles non linéaires**. Ces équations décrivent la convection atmosphérique.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

x,y,z sont des variables qui représentent des paramètres physiques du système (par exemple, la vitesse de rotation des fluides et la température).

σ,ρ,β sont des constantes physiques.

Le scénario : Un jour, Lorenz a voulu refaire une simulation. Au lieu de la relancer du début, il a réutilisé les données d'une simulation précédente. Pour gagner du temps, il a tapé les valeurs arrondies qu'il avait sur une feuille de papier, par exemple 0.506 au lieu de 0.506127.

Le résultat : Les deux simulations étaient presque identiques au début, mais après un certain temps virtuel, elles ont **divergé de manière spectaculaire**. La simulation avec les valeurs arrondies a produit un climat totalement différent de la simulation originale.

La conclusion : Ce petit changement initial, aussi infime qu'un "battement d'aile de papillon", a conduit à un résultat totalement imprévisible. C'est la naissance de l'**effet papillon** et la confirmation que certains systèmes physiques étaient impossibles à prévoir à long terme, même s'ils étaient régis par des lois déterministes.

IV. Le chaos est…partout!

La gouttière qui fuit : Le chaos dans l'eau

- **Le concept :** On pourrait penser que l'égouttement d'un robinet qui fuit est un phénomène parfaitement régulier. Mais si on observe attentivement, le rythme devient rapidement imprévisible. Le temps entre deux gouttes successives n'est pas constant, mais varie de manière erratique.
- **Lien avec le chaos :** C'est un exemple de chaos en mécanique des fluides. La goutte qui tombe interagit de manière complexe avec le liquide qui est encore dans le robinet. Cette petite perturbation influence la formation de la goutte suivante de manière non linéaire. Le système est déterministe (régi par les lois de la gravité et de la tension de surface), mais sa sensibilité aux conditions initiales le rend imprévisible.

Le drapeau qui flotte : Le chaos dans l'air

- **Le concept :** Observez un drapeau qui flotte au vent. Ses ondulations sont un sont tout sauf régulières. Elles sont asymétriques et se déforment de manière imprévisible, ne se répétant jamais.

- **Lien avec le chaos :** C'est un exemple de **turbulence**, une manifestation célèbre du chaos. L'interaction entre le drapeau et les tourbillons d'air (un système non linéaire) est extrêmement sensible. La moindre variation dans la vitesse ou la direction du vent, ou la plus infime imperfection dans le tissu du drapeau, change radicalement la manière dont il va se plier et se déplier. C'est l'effet papillon en action, sur une échelle visible.

V. Quelques applications

Prévisions météo

Plutôt que de faire une seule simulation avec les meilleures données initiales possibles, les météorologues font de nombreuses simulations en parallèle. Ils créent non pas un, mais une cinquantaine ou une centaine de **modèles de prévision**. Chacun de ces modèles part des conditions initiales légèrement différentes, en intégrant de petites perturbations qui représentent les incertitudes de mesure.

Si toutes les simulations (chaque "trajectoire" chaotique) convergent vers un résultat similaire (par exemple, "il va pleuvoir dans 2 jours"), cela signifie que l'incertitude est faible et que la prévision est très fiable.

Si, au contraire, les simulations divergent de manière significative (une partie prévoit de la pluie, l'autre du beau temps, une troisième une tempête), cela signifie que le système est dans un régime chaotique et que la prévision est peu fiable. On parle d'un **cône d'incertitude qui s'élargit**.

Le concept de "prévisibilité" : Les météorologues ne cherchent plus à faire une prévision parfaite à 15 jours, car ils savent que c'est impossible. Ils cherchent à déterminer jusqu'où leurs prévisions sont fiables.

Mouvement des planètes

La théorie du chaos, inspirée des travaux de Poincaré et Lorenz, a permis de démontrer qu'une prévision parfaite de la position des planètes est impossible sur une échelle de temps très longue.

Pourquoi ? Parce qu'il est impossible de connaître les positions et vitesses des planètes avec une précision infinie. Les moindres erreurs de mesure, si infimes soient-elles, vont s'amplifier de manière exponentielle, rendant la prédiction à des échelles de temps astronomiques impossible.

Le temps de divergence est de l'ordre de quelques dizaines de millions d'années (c'est ce qu'on appelle le théorème de Lyapounov). Au-delà, même une prévision de la position de Jupiter par rapport au reste du système devient incertaine.

Lyapounov

Pour conclure...

La théorie du chaos nous a forcés à reconsidérer notre vision de la science et du monde. Avant son avènement, la physique déterministe (héritée de Newton) et le pur hasard étaient les deux seules options pour décrire un système. Le chaos a introduit une troisième voie : des systèmes régis par des lois parfaitement prévisibles, mais qui ont un comportement intrinsèquement imprévisible à cause de leur sensibilité aux conditions initiales.

Le chaos est donc l'étude de l'**ordre caché dans le désordre** et de la complexité qui peut naître de la simplicité.

Le chaos a marqué un tournant dans l'approche scientifique.
Au lieu de chercher des solutions exactes (des formules),
les mathématiciens et les physiciens ont appris à utiliser des méthodes **qualitatives et géométriques.**
On pourrait ainsi aborder la notion de fractales
et leur lien avec le chaos…mais cela est une autre histoire!