

Electrocinétique 2 - Circuits linéaires en régime transitoire

Quand on connecte les différents éléments d'un circuit, les grandeurs électriques telles que l'intensité et la tension évoluent au cours du temps. On dit que le régime est **transitoire**. Il dépend des conditions initiales. Après une durée suffisamment longue, théoriquement infinie, l'évolution est indépendante des conditions initiales ; le régime est permanent (c'est-à-dire continu).

Certains dipôles favorisent des régimes transitoires suffisamment longs pour être étudiés : nous étudierons dans ce chapitre le **condensateur** et la **bobine**.

1. Circuit RC série

1.1. Caractéristiques d'un condensateur

Un condensateur est un dipôle constitué de deux conducteurs (les armatures) séparés par un matériau isolant. Les condensateurs sont faiblement conducteurs. Dans les exercices, en l'absence d'indication particulière, un condensateur est considéré comme idéal, c'est-à-dire qu'aucun courant ne traverse le matériau isolant.

A RETENIR

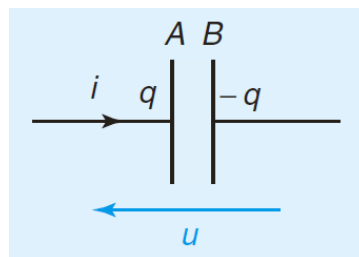


Schéma d'un condensateur

ATTENTION A L'ORIENTATION DU COURANT ET AUX SIGNES DES CHARGES !
En convention récepteur, le courant arrive sur l'armature portant la charge + q(t).

La **capacité** C d'un condensateur lie la tension aux bornes et la charge des armatures :

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

$q(t)$: charge de l'armature avec les conventions indiquées ci-dessus (en C)

$u(t)$: tension aux bornes du condensateur

C : Capacité du condensateur. La capacité se mesure en farad (F)

Ordre de grandeur :

Les valeurs habituelles de capacité s'étalent entre 1 nF et 1 μ F

Par conséquent, il est possible de lier l'intensité du courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. En effet on rappelle que :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$$

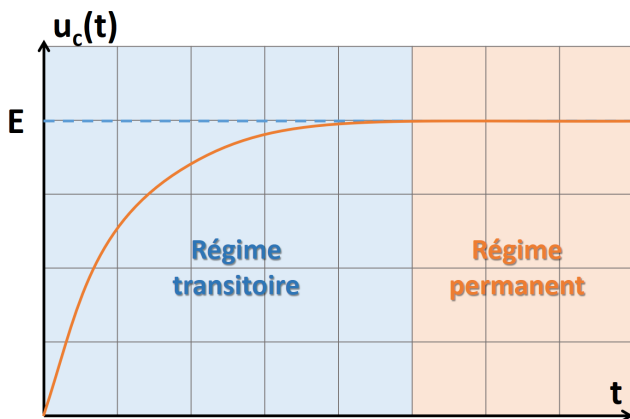
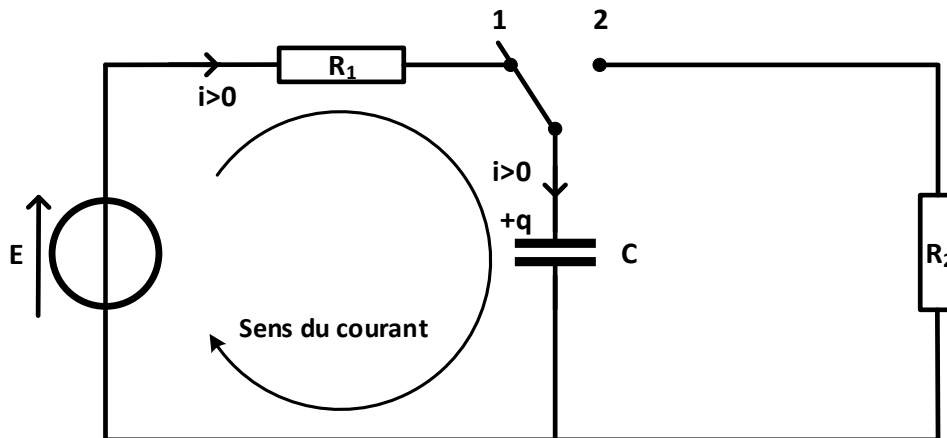
Par conséquent :

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}(t)$$

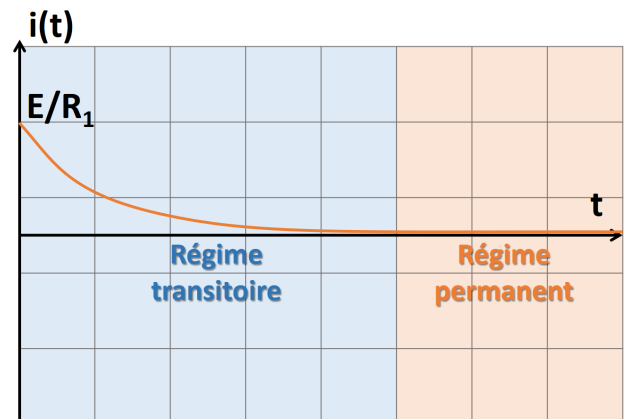
1.2. A quoi sert un condensateur ?

Charge d'un condensateur

Un condensateur est un composant électronique qui est capable de **stocker de l'énergie**, contrairement aux résistors qui ne font que la dissiper sous forme d'énergie thermique. Cette énergie est stockée lors de la **charge du condensateur**, c'est-à-dire lorsqu'on branche à ses bornes un générateur. C'est la situation indiquée par le schéma ci-dessous lorsque le commutateur est en position 1 :



La tension aux bornes du condensateur prend la valeur de la tension du générateur après le régime transitoire.



L'intensité du courant est positive puis s'annule après le régime transitoire

Calcul de l'énergie stockée

La quantité d'énergie stockée peut être calculée en observant que la puissance électrique reçue par le condensateur lors de la charge vaut à chaque instant t :

$$\mathcal{P}(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot C \cdot \frac{du}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{C \cdot u^2}{2} \right)$$

Par intégration, on en déduit que l'énergie instantanée emmagasinée par le condensateur dépend de la tension à ses bornes, que l'on peut aussi exprimer en fonction de sa charge q :

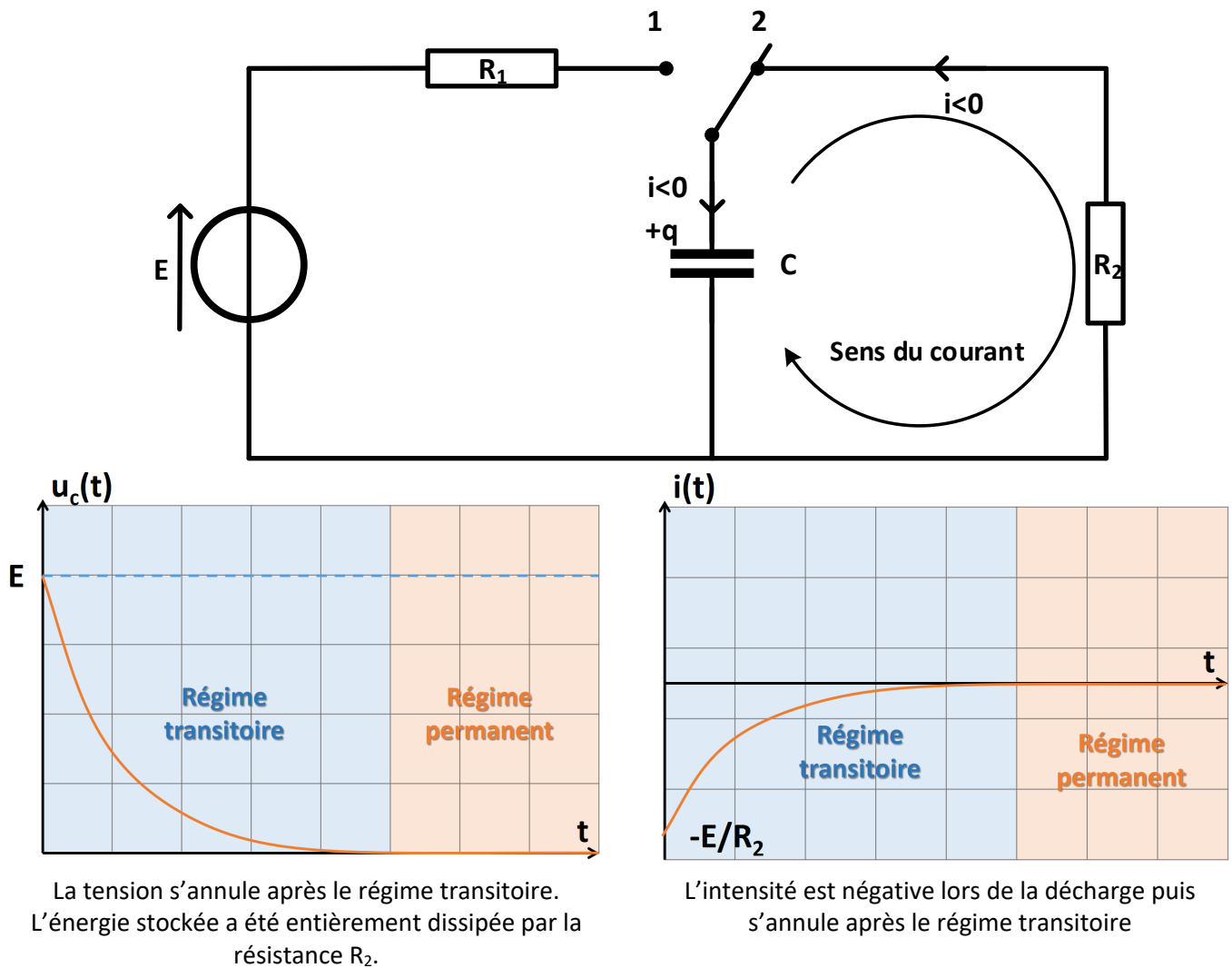
A RETENIR

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2(t)}{C}$$

A l'issue de la charge, dans le montage ci-dessus, le condensateur a donc accumulé l'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2$.

Décharge d'un condensateur

L'intérêt de cette opération est qu'elle est réversible : au moment voulue, l'énergie stockée par le condensateur peut être restituée à un dipôle. On parle alors de **décharge du condensateur**.



La tension aux bornes du condensateur, ainsi que la charge q , sont nulles en régime permanent. Le condensateur a donc cédé toute son énergie initiale. Celle-ci a été dissipée par la résistance sous forme d'énergie thermique.

Comportement d'un condensateur en régime permanent

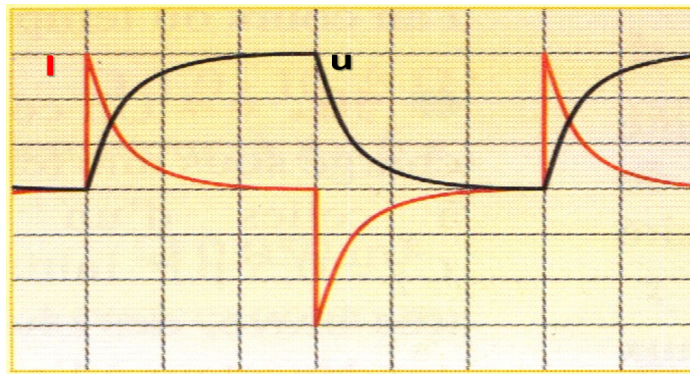
On remarque que dans tous les cas, le courant traversant un condensateur s'annule en régime permanent. Cela signifie qu'il se comporte comme un interrupteur ouvert.

A RETENIR

En régime permanent, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

Continuité de l'énergie

Si on considère plusieurs cycles de charges et décharges d'un condensateur on constate qu'il y a **continuité de la tension et discontinuité de l'intensité du courant** :



L'intensité i traversant le condensateur est discontinue ; la tension u à ses bornes est continue

En effet, il ne peut pas y avoir discontinuité de l'énergie échangée aux bornes d'un dipôle. Or nous avons vu que pour un condensateur $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)$ donc la continuité de l'énergie impose la continuité de la tension. Il en est bien sûr de même pour la charge, également liée à la tension par une relation linéaire.

A RETENIR

La tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur, ainsi que sa charge $q(t)$ ne peuvent pas subir de discontinuité.

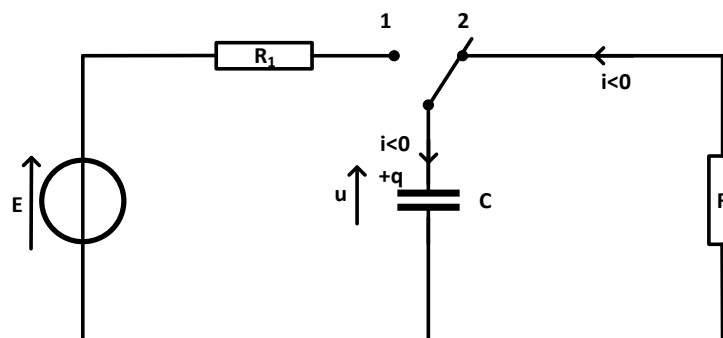
1.3. Régime libre du circuit RC : étude de la décharge d'un condensateur

Nous allons à présent étudier le régime transitoire à proprement parler : quels sont les **temps caractéristiques** de la charge et de la décharge du condensateur ? Nous allons commencer par la décharge car dans ce cas les équations sont plus simples à résoudre.

DEFINITION

Le régime libre, ou régime propre, d'un circuit est le régime que nous observons lorsque ses sources libres sont éteintes.

Nous reprenons donc le circuit précédent lorsque le condensateur a été chargé et que l'on place le commutateur en position 2 :



A l'instant initial $t=0$ le condensateur est chargé, la tension à ses bornes vaut E et la charge initiale vaut donc $q_0 = C \cdot E$. A partir de cet instant, nous pouvons écrire :

$$u(t) = -Ri(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Or on sait également que $i(t) = \frac{dq}{dt}$. La tension $u(t)$ vérifie donc l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

On remarque que le produit RC est homogène à un temps, on le note τ . Il s'agit du temps de relaxation du circuit (R,C) série.

A VOUS DE JOUER

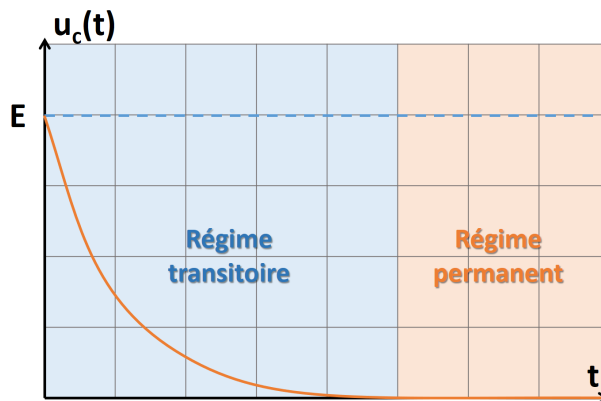
Déterminer le temps t_0 nécessaire pour que la tension u atteigne 10 % de sa valeur initiale E . Conclusion ?

Par ailleurs, par continuité de la tension, on peut affirmer que A prend la valeur E puisque $u=E$ à l'instant initial. On écrit donc :

$$u(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Où $\tau = RC$ est le temps de relaxation du circuit (R,C) série.

On retrouve bien la courbe indiquée au paragraphe précédent :



A VOUS DE JOUER

Calculer la valeur du courant i traversant le condensateur et tracer la courbe.

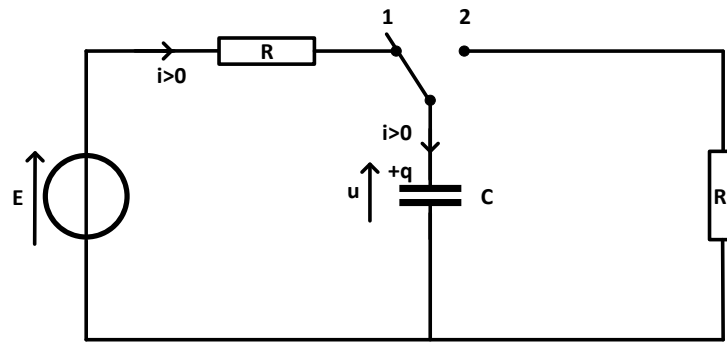
Bilan énergétique

Calculons l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor R :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-2\frac{t}{RC}} dt = \frac{1}{2} CE^2$$

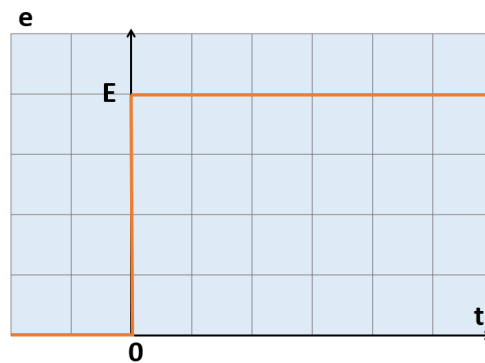
Il s'agit bien de l'énergie du condensateur à l'instant initial. On a donc bien vérifié que l'énergie stockée initialement dans le condensateur a été intégralement dissipée par effet Joule dans le résistor.

1.4. Circuit RC soumis à un échelon de tension : étude de la charge d'un condensateur



Un échelon de tension peut être réalisé à l'aide d'une source de tension constante et d'un interrupteur à deux positions que l'on bascule à l'instant $t=0$: donc dans la position 1 de notre circuit, en considérant que le condensateur est à ce moment complètement déchargé : $q(0)=0$ et $u(0)=0$.

Voici la représentation graphique de cet échelon de tension :



A partir de l'instant $t=0$ on peut donc écrire la loi d'additivité des tensions comme suit :

$$u(t) = -Ri(t) + E = \frac{q(t)}{C}$$

Comme précédemment, on sait que $i(t) = \frac{dq}{dt}$. La tension $u(t)$ vérifie donc l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}$$

POINT METHODE

La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre se fait en 4 étapes :

1. Détermination de la solution générale de l'équation sans second membre : $u_1(t)$.
2. Détermination d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $u_2(t)$.
En physique, nous chercherons une solution constante qui correspond au régime permanent. On la notera donc simplement u_2 .
3. La solution générale de l'équation avec second membre est alors la somme des deux solutions :
$$u(t) = u_1(t) + u_2$$
4. Détermination des constantes en tenant compte des conditions initiales.

Nous allons suivre point par point la méthode de résolution :

1. L'équation différentielle sans second membre est la suivante :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

Il s'agit de la même équation que celle déjà étudiée lors de la décharge du condensateur. Nous connaissons sa solution générale :

$$u_1(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

2. Pour la solution particulière constante, il suffit de remarquer que quand le régime permanent est atteint, les dérivées temporelles s'annulent (la dérivée d'une constante est nulle). On peut donc écrire :

$$\frac{u_2}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Soit encore :

$$u_2 = E$$

3. La solution générale de notre équation est donc la suivante :

$$u(t) = u_1(t) + u_2 = Ae^{-\frac{t}{RC}} + E$$

4. Il ne reste plus qu'à déterminer la constante A. Pour cela, on rappelle qu'il ne peut y avoir de discontinuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Cela signifie qu'à l'instant $t=0$ $u=0$ donc on a :

$$u(0) = A + E = 0$$

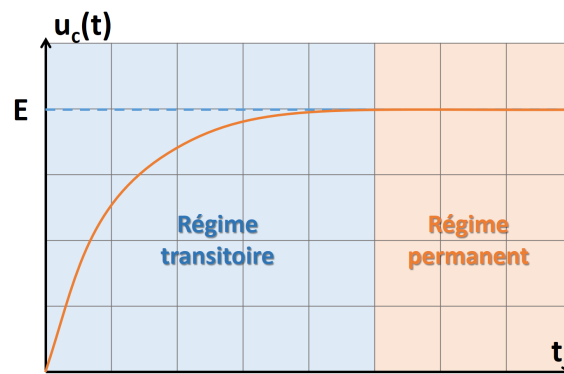
On obtient : $A = -E$

Voici donc l'expression de $u(t)$ lors de la charge du condensateur

$$u(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Où $\tau = RC$ est le temps de relaxation du circuit (R,C) série.

La représentation graphique de cette fonction correspond bien aux observations du paragraphe précédent :



A VOUS DE JOUER

Calculer la valeur du courant i traversant le condensateur et tracer la courbe.

Etude énergétique

Reprenons l'expression de l'additivité des tensions dans le circuit :

$$u(t) = -Ri(t) + E$$

Si nous multiplions les termes par $i(t)$ nous obtenons :

$$u(t) \cdot i(t) = -Ri^2(t) + E \cdot i(t)$$

Ou encore :

$$E \cdot i(t) = Ri^2(t) + u \cdot i(t)$$

$$\mathcal{P}_{\text{fournie par le générateur}} = \mathcal{P}_{\text{dissipée par effet Joule}} + \mathcal{P}_{\text{reçue par le condensateur}}$$

L'énergie totale fournie par le générateur vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{générateur}} = \int_0^{+\infty} E \cdot i(t) dt = E \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dq}{dt}(t) dt = E \cdot Q$$

Où Q désigne la charge finale du condensateur soit : $Q = C \cdot E$, donc :

$$\mathcal{E}_{\text{générateur}} = C \cdot E^2$$

Or nous savons que le condensateur a quant à lui stocké l'énergie suivante :

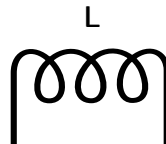
$$\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2} C \cdot E^2 = \frac{\mathcal{E}_{\text{générateur}}}{2}$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est donc dissipée par effet Joule dans la résistance.

2. Circuit RL

2.1. Caractéristiques d'une bobine

Une bobine est un dipôle constitué d'un enroulement de fil conducteur autour d'un matériau magnétique. Elle a toujours une résistance, celle du fil. Une bobine idéale est une bobine dont on peut négliger la résistance ; elle est caractérisée par son **inductance** propre, notée L et mesurée en Henry (H).



Symbole d'une bobine idéale

A RETENIR

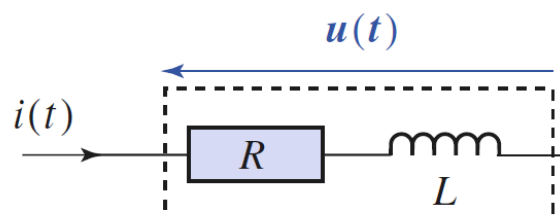
Une bobine idéale est caractérisée par son **inductance** L . La tension à ses bornes est liée à l'intensité qui la traverse par la relation :

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Ordre de grandeur :

Les valeurs habituelles de capacité s'étalent entre 10 et 100 mH

En réalité, il faut tenir compte de la résistance non nulle du bobinage. Une bobine réelle peut ainsi être modélisée par l'association en série d'une bobine idéale d'inductance L et d'un résistor de résistance R .



La tension aux bornes de la bobine s'écrit alors :

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i$$

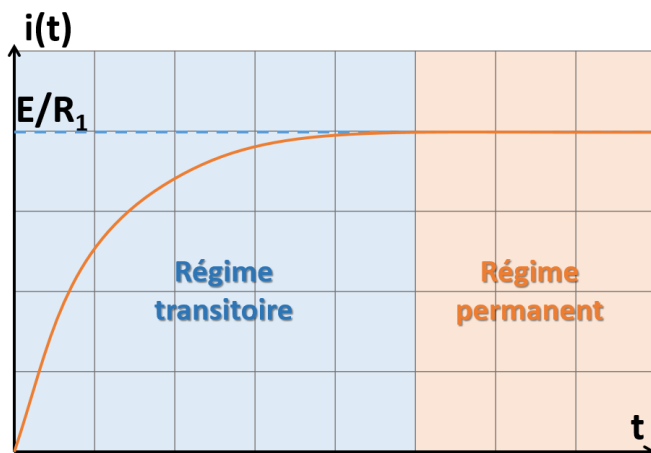
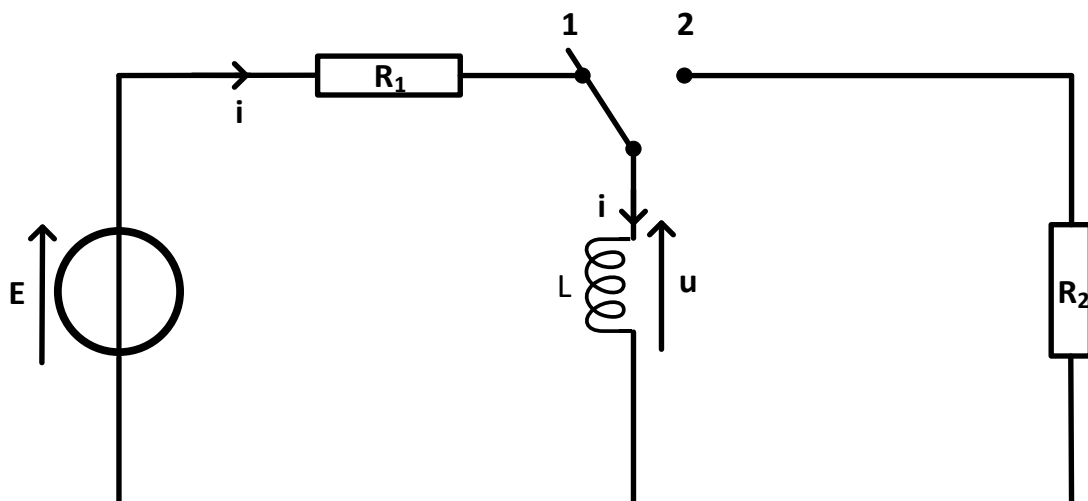
REMARQUE

En l'absence d'indication dans un exercice sur la valeur de sa résistance, une bobine est considérée comme idéale

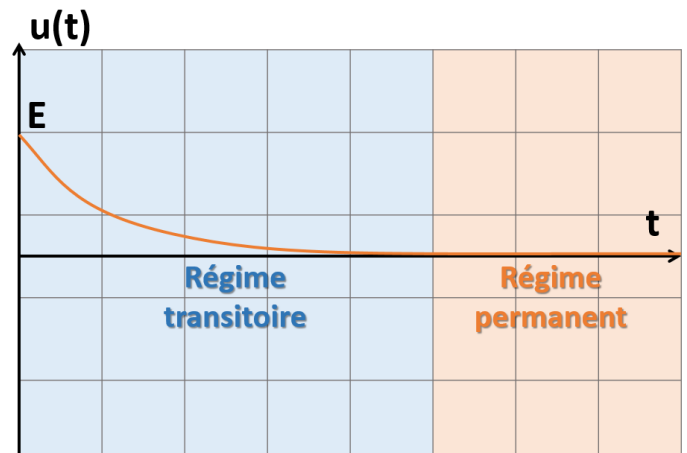
Comme le condensateur, la bobine est un dipôle capable de stocker et restituer de l'énergie. En effet, lorsqu'elle est traversée par un courant elle stocke de l'**énergie magnétique**. Le comportement est cependant très différent de celui du condensateur : alors que le temps de réponse concernait l'évolution de la tension du condensateur, c'est ici un **retard à l'établissement du courant** que l'on va constater. C'est donc l'évolution de l'intensité qui sera intéressante à observer.

Etablissement du courant

Reprenons un montage similaire au montage étudié avec le condensateur. On remplace donc le condensateur par une bobine idéale d'inductance L . Lorsque l'interrupteur est placé en position 1, le générateur va permettre de faire passer un courant i dans la bobine, et nous allons observer l'établissement de ce courant en fonction du temps.



L'intensité du courant s'établit après un temps de retard, caractéristique du circuit RL



La tension s'annule progressivement : la bobine se comporte comme un fil conducteur en régime permanent

A RETENIR

En régime permanent, une bobine se comporte comme un interrupteur fermé (ou un simple fil conducteur).

La puissance reçue par une bobine idéale peut être calculée comme suit :

$$\mathcal{P}(t) = u \cdot i = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i = \frac{d}{dt} \left(\frac{L \cdot i^2}{2} \right)$$

Par intégration, on en déduit que l'énergie instantanée emmagasinée par la bobine dépend de l'intensité i du courant qui la traverse :

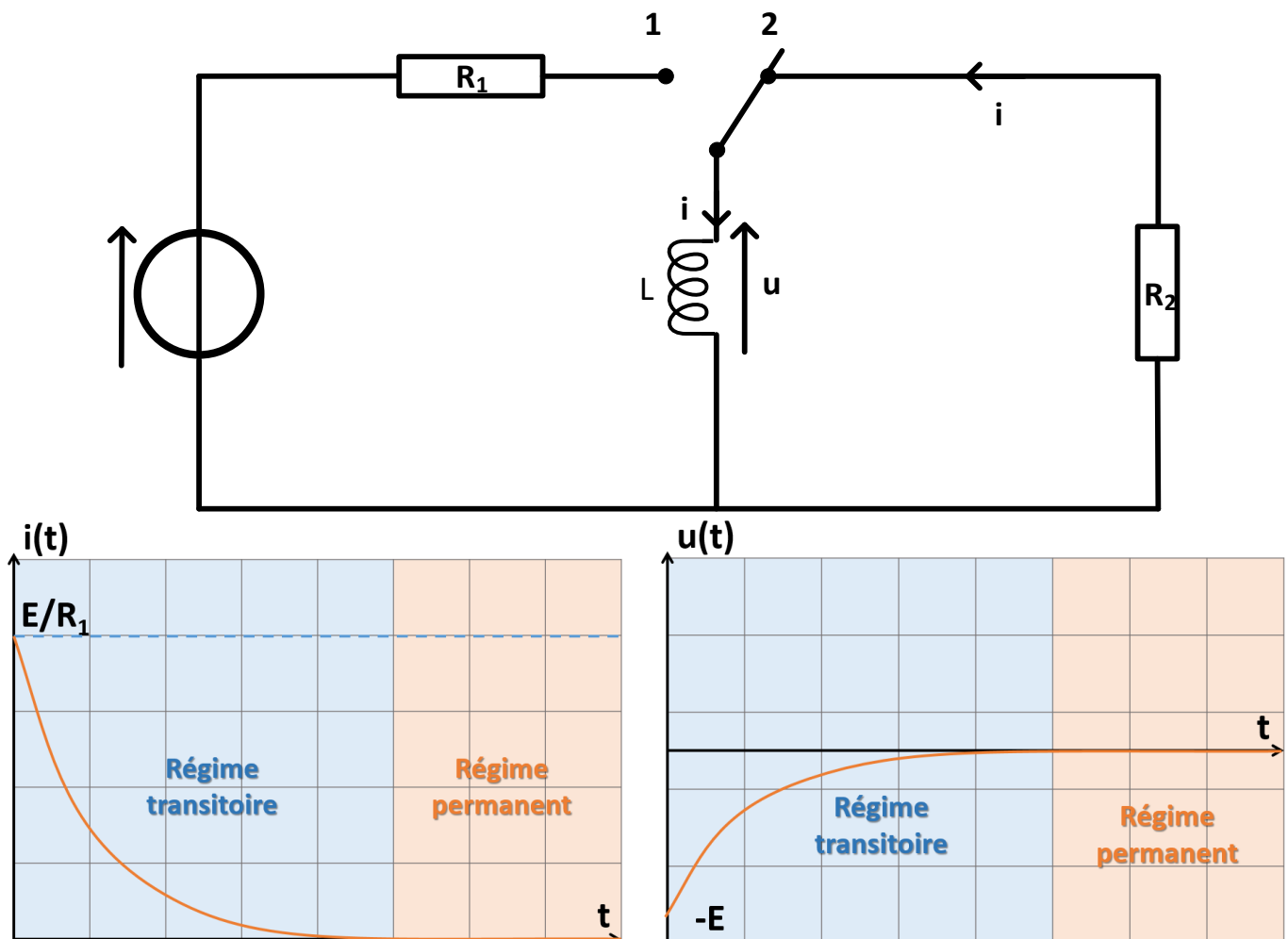
A RETENIR

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

Conséquence : l'intensité du courant qui parcourt une bobine ne peut pas subir de discontinuité.

Relaxation de la bobine

Comme pour le condensateur, l'énergie stockée peut être libérée dans un autre circuit. C'est ce qui se produit lorsqu'on bascule l'interrupteur en position 2 :

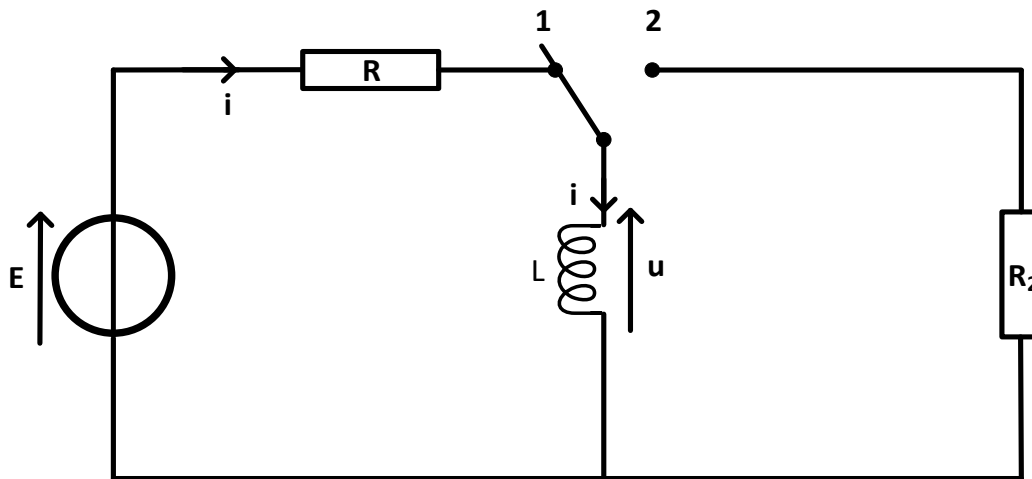


Le courant s'annule au bout d'un temps caractéristique. Pendant ce temps, la bobine se comporte comme un générateur

La tension est négative car la bobine s'oppose à l'annulation du courant. Elle finit par s'annuler quand plus aucun courant ne circule

2.2. Réponse à un échelon de tension : établissement du courant dans un circuit inductif

Nous allons déterminer le temps de relaxation dans la première phase, lorsque la bobine est reliée au générateur et que le courant s'établit :



Nous commençons par écrire la loi d'additivité des tensions :

$$E = Ri + u = Ri + L \frac{di}{dt}$$

L'intensité du courant qui traverse la bobine vérifie donc l'équation différentielle suivante :

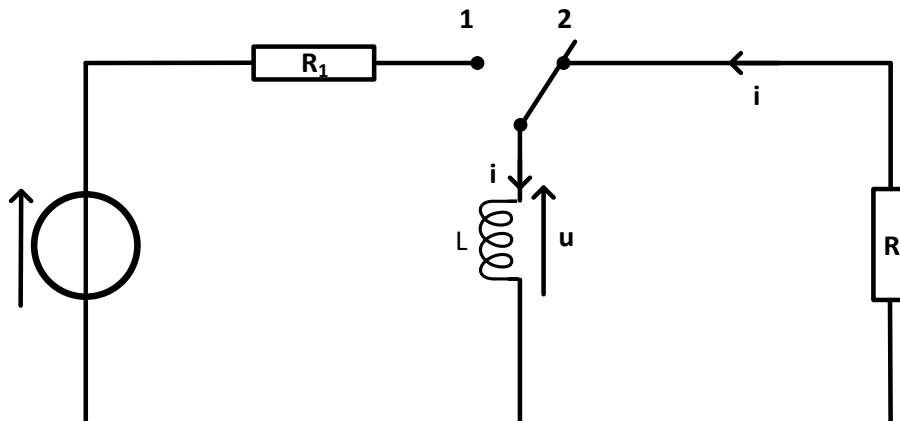
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

A VOUS DE JOUER

1. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer $i(t)$.
2. L'expression trouvée est-elle en accord avec les observations ? (paragraphe précédent)
3. Quel est le temps caractéristique τ de l'établissement du courant ?
4. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$. Conclusion ?

2.3. Régime libre du circuit RL

Nous basculons maintenant l'interrupteur en position 2 alors que le courant circule dans la bobine. Comme nous l'avons vu, celle-ci va alors s'opposer à l'annulation de l'intensité en imposant une tension négative à ses bornes. Nous allons calculer le temps caractéristique du retard à l'annulation de l'intensité (temps de relaxation).



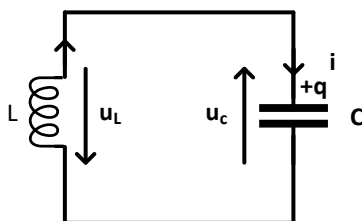
A VOUS DE JOUER

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.
2. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $i(t)$.
3. L'expression trouvée est-elle en accord avec les observations ? (paragraphe précédent)
4. Quel est le temps caractéristique τ de l'annulation du courant ?
5. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$. Conclusion ?

3. Circuit LC : un oscillateur harmonique non amorti

3.1. Principe du circuit LC

Ici, nous allons montrer qu'en associant une bobine et un condensateur il est possible de créer des oscillations électriques. En effet, ces deux composants sont susceptibles de stocker et libérer de l'énergie. En les associant, ils vont pouvoir échanger entre eux leur énergie.



Pour la suite, on supposera qu'à l'instant initial ($t=0$) le condensateur est chargé avec une charge q_0 et que l'intensité du courant est nulle.

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

3.2. Equation différentielle

En appliquant la loi des mailles au circuit ci-dessus, il vient :

$$u_C + u_L = 0$$

En utilisant les expressions vues précédemment pour les tensions aux bornes d'un condensateur et d'une bobine, on peut écrire :

$$\frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

Or on sait également que

$$i = \frac{dq}{dt}$$

On peut donc écrire :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

EQUATION DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; ω_0 est appelé **pulsation propre** du circuit LC. Elle s'exprime en s^{-1} .

On peut également écrire : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ où T_0 est la période propre de l'oscillateur.

3.3. Résolution de l'équation différentielle : l'oscillateur harmonique

L'équation de l'oscillateur harmonique est une équation différentielle du second ordre (elle comporte une dérivée seconde). Nous étudierons plus en détail la résolution de ces équations dans la partie suivante (circuit RLC). Ici, nous admettrons que cette équation admet la solution générale suivante :

$$q(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

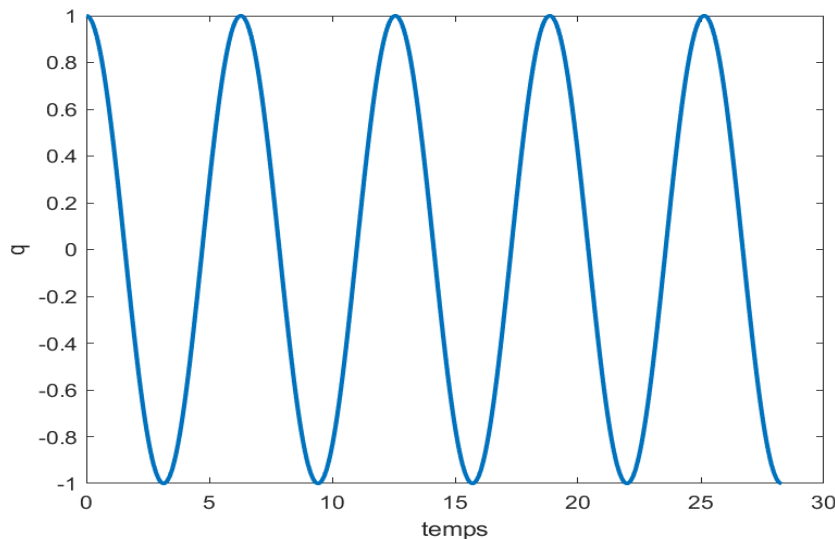
Où A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales. On remarque qu'il y a deux constantes à déterminer et que deux valeurs définissent les conditions initiales, ce qui permet de déterminer q.

L'expression obtenue pour q(t) correspond à une fonction sinusoïdale. Une écriture équivalente est la suivante :

$$q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Au lieu de déterminer les constantes A et B, on a ici à déterminer les constantes Q_0 (appelée amplitude) et φ (appelée déphasage). Nous reviendrons sur cette écriture au chapitre suivant. Ici, nous utiliserons la première plus commode pour les calculs.

La représentation de q en fonction du temps est la suivante :



On parle d'oscillateur harmonique car il correspond à un signal périodique « pur » : il est défini par une fréquence unique.

Détermination des constantes A et B

La détermination des deux constantes se fait en utilisant les conditions initiales définies précédemment :

$$\begin{cases} q(0) = q_0 = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) = A \\ i(0) = 0 = \frac{dq}{dt}(0) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(0) + B \omega_0 \cos(0) = B \omega_0 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} A = q_0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

On a donc une charge qui varie de manière sinusoïdale, avec une amplitude q_0 et une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Les valeurs des courants et tensions peuvent être facilement déduits de cette expression.

3.4. Etude énergétique

Il suffit ici de repartir de la loi des mailles déjà écrite précédemment :

$$u_C + u_L = 0$$

Soit :

$$\frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

Les puissances s'obtiennent en multipliant les tensions par i soit :

$$\frac{q}{C} \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = 0$$

En intégrant par rapport au temps on trouve :

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} Li^2 = \text{constante}$$

Ou encore

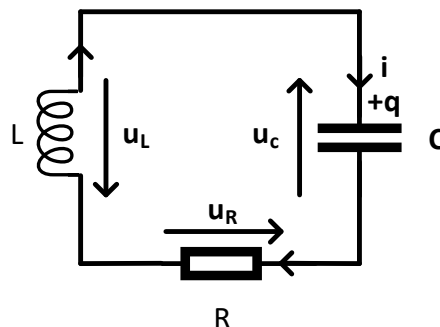
$$\mathcal{E}_{\text{cond}} + \mathcal{E}_{\text{bobine}} = \text{constante}$$

En d'autres termes, il y a **conservation de l'énergie** : la bobine et le condensateur échangent perpétuellement leur énergie sans perte. Ce cas est évidemment un cas idéal, donc fictif : il néglige les phénomènes dissipatifs dus aux résistances des conducteurs dans le circuit.

4. Circuit RLC série : régime libre

4.1. Principe

L'oscillateur harmonique vu précédemment n'est qu'un modèle, un cas idéal. En réalité, les phénomènes dissipatifs ne sont pas négligeables. Dans ce cas, les oscillations obtenues ne dureront qu'un temps, ou ne se produiront pas si la résistance est très grande. Pour prévoir cela, il va falloir réaliser une étude mathématique plus poussée en intégrant une résistance R dans le circuit.



Comme précédemment, il est nécessaire de fixer les conditions initiales pour résoudre le problème. Nous choisissons les mêmes que précédemment :

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

4.2. Equation différentielle

Cette fois la loi des mailles s'écrit :

$$u_C + u_R + u_L = 0$$

En utilisant les expressions vues précédemment pour les tensions aux bornes d'un condensateur et d'une bobine, on peut écrire :

$$\frac{q}{C} + R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

En écrivant i sous la forme $\frac{dq}{dt}$ et en écrivant l'équation différentielle sous sa forme canonique (le facteur devant la dérivée de plus grand ordre est égal à 1 :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

EQUATION DIFFERENTIELLE

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Avec :

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; ω_0 est appelé **pulsation propre** du circuit RLC, exprimée en s^{-1} .

$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$; Q est appelé facteur de qualité du circuit RLC. C'est un nombre sans dimension.

On remarque que les équations différentielles sont les mêmes pour l'intensité du courant ainsi que pour les tensions aux bornes de chaque dipôle

4.3. Résolution de l'équation différentielle : les différents régimes

POINT METHODE

Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, sans second membre, mise sous sa forme canonique :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + a \cdot \frac{dX}{dt} + b \cdot X = 0$$

1. Ecrire l'équation caractéristique, qui est un polynôme du second degré avec les mêmes coefficients :
Dans notre cas :

$$r^2 + a \cdot r + b = 0$$

2. Calculer le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = a^2 - 4 \cdot b$$

3. Selon la valeur du discriminant on distingue 3 régimes possibles :

- Si $\Delta > 0$: le régime est **apériodique**

L'équation caractéristique admet deux solutions réelles r_1 et r_2

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$X(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t}$ où A et B sont des constantes à déterminer (conditions initiales)

- Si $\Delta = 0$: le régime est **critique**

L'équation caractéristique admet une solution réelle r

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$X(t) = (At + B) \cdot e^{rt}$ où A et B sont des constantes à déterminer (conditions initiales)

- Si $\Delta < 0$: le régime est **pseudo-périodique**

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes r_1 et r_2 que l'on note :

$$r_1 = u + i \cdot v \text{ et } r_2 = u - i \cdot v$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$X(t) = e^{ut} \cdot (A \cdot \cos vt + B \cdot \sin vt)$ où A et B sont des constantes à déterminer (conditions initiales)

Appliquons cette méthode à notre équation :

1. L'équation caractéristique est la suivante : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot r + \omega_0^2 = 0$

2. Le discriminant vaut donc :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4 \cdot \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

3. Détermination des 3 régimes

Régime apériodique : $Q < \frac{1}{2}$

Les deux solutions sont les suivantes, on peut vérifier qu'elles sont toutes les deux négatives :

$$r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

On a donc :

$$q(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t}$$

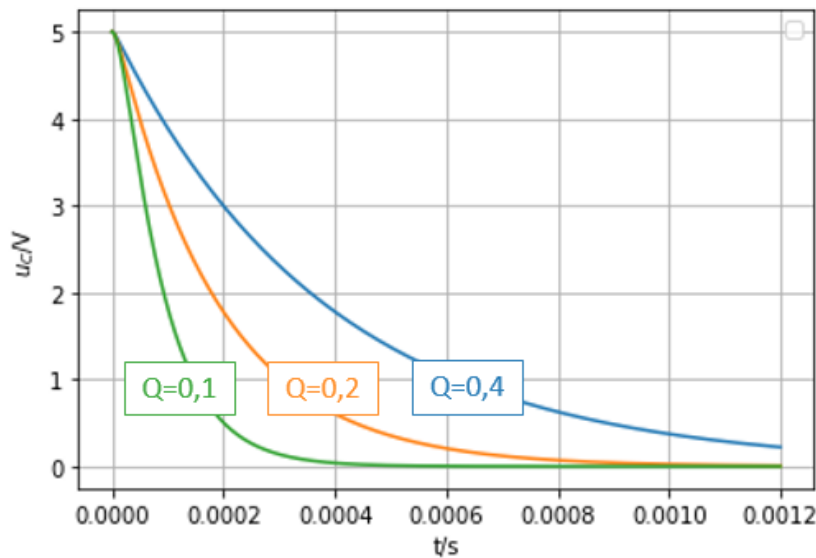
Les constantes A et B peuvent être déduites des conditions initiales :

$$\begin{cases} q(0) = q_0 = A + B \\ i(0) = 0 = r_1 A + r_2 B \end{cases}$$

La résolution de ce système à deux équations et deux inconnues donne :

$$\begin{cases} A = q_0 r_2 / r_2 - r_1 \\ B = q_0 r_1 / r_1 - r_2 \end{cases}$$

L'allure de l'évolution de q (et des autres grandeurs du circuit) est la suivante, selon la valeur de Q :



Régime critique : $Q = \frac{1}{2}$

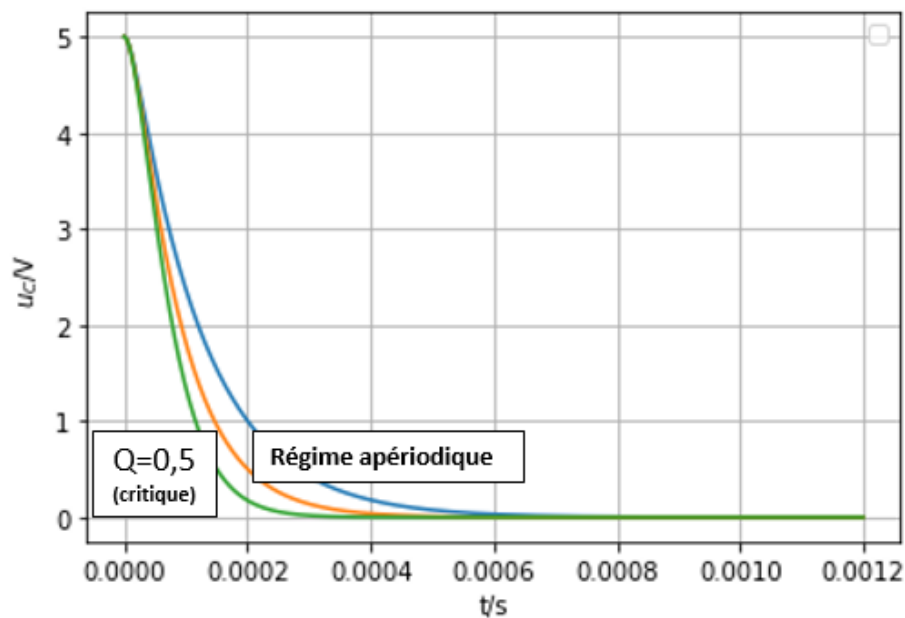
La solution est la suivante :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

Par conséquent on a :

$$q(t) = (At + B) \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q} \cdot t}$$

L'allure du régime critique est la même que celle du régime apériodique : **il correspond au retour au repos le plus rapide.**



Régime pseudo-périodique : $Q > \frac{1}{2}$

Les racines de l'équation caractéristique sont du type :

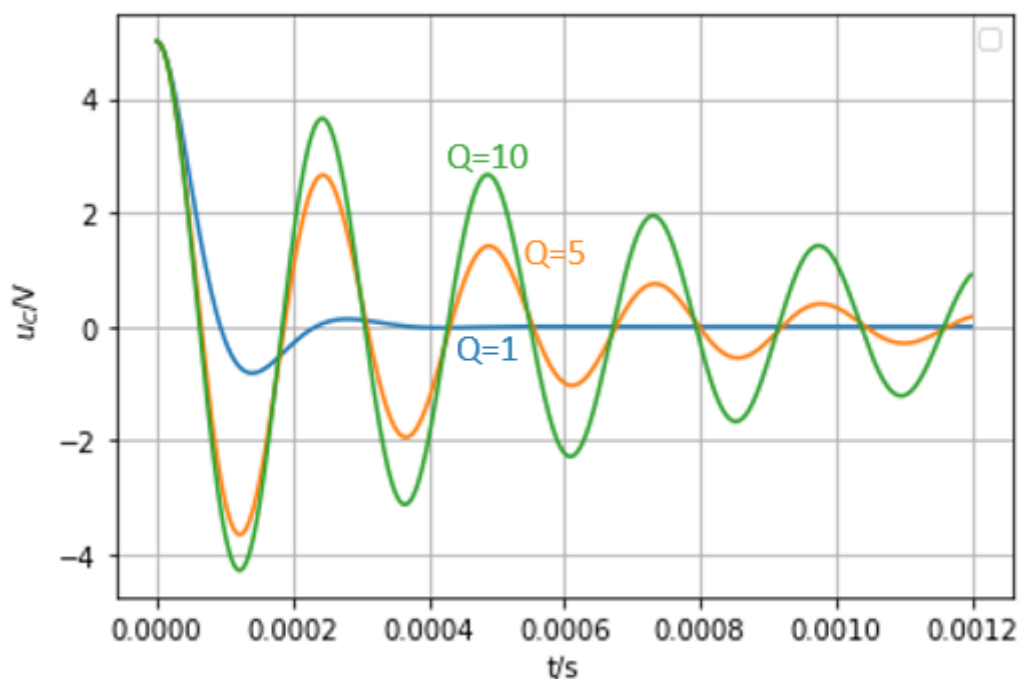
$$r_i = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Posons

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On a alors :

$$q(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t)$$



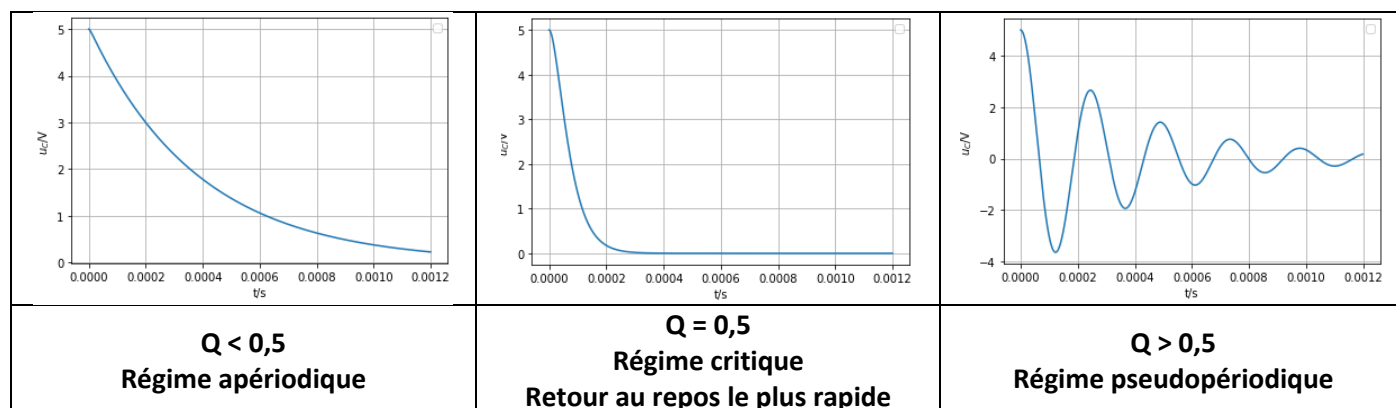
4.4. Etude énergétique

A VOUS DE JOUER

1. Réaliser l'étude énergétique sur le circuit RLC.

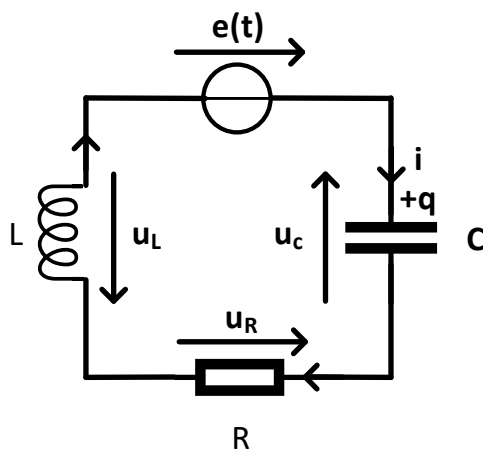
2. Conclusion ?

En résumé ...



5. Circuit RLC série : réponse à un échelon de tension

On considère le montage suivant :



$e(t)$ est un échelon de tension : pour $t < 0$ sa valeur est nulle, et à $t = 0$ elle passe à la valeur E .

On écrit alors la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L = E$$

Soit :

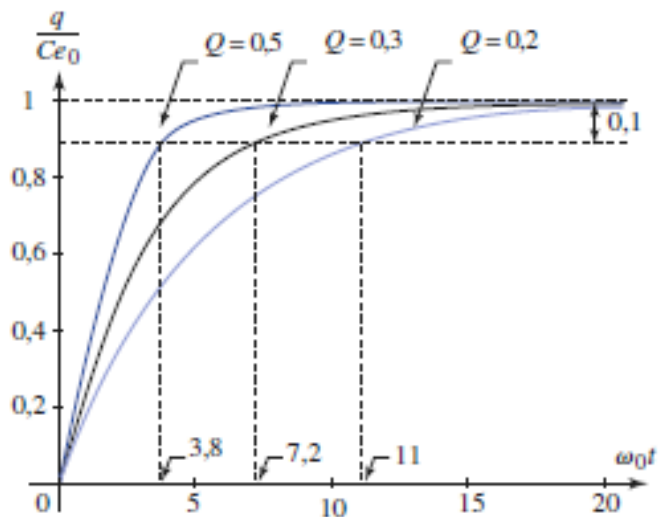
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du second ordre, avec second membre. La méthode de résolution est la même que celle des équations du premier ordre avec second membre : on ajoute à la solution générale de l'équation sans second membre une solution particulière de l'équation avec second membre. On cherche cette solution particulière sous la forme d'une constante. Ici, elle peut facilement être déterminée, elle correspond au régime permanent :

$$q_{perm} = C \cdot E$$

Le reste de l'étude est similaire à ce qui a été fait dans la partie précédente. On tend vers le régime permanent selon les 3 régimes possibles, ce que l'on peut représenter graphiquement comme suit :

Régime aperiodique ($Q < 0,5$)
Régime critique ($Q = 0,5$)



Régime pseudopériodique

