

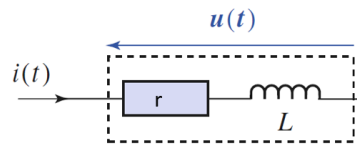
# TD 3

## Corrigé

### Exercice 1 : Applications directes du cours

#### 1. Bobine réelle

Bobine réelle ( $L, r$ ) :



En utilisant uniquement un bilan énergétique, établir la relation courant-tension aux bornes de cette bobine.

$$\mathcal{P}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{L \cdot i^2}{2} \right) + r \cdot i^2 = u \cdot i$$

On peut donc écrire :

$$u \cdot i = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i^2$$

Soit en simplifiant par  $i$  :

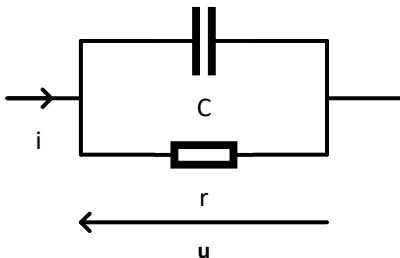
$$u = L \frac{di}{dt} + r \cdot i$$

Comment se comporte-t-elle en régime continu ?

En régime continu, la bobine est un fil conducteur, il ne reste donc que la résistance. Elle se comporte comme un conducteur ohmique de résistance  $r$ . On le voit immédiatement dans l'équation précédente en annulant la dérivée temporelle.

#### 2. Condensateur réel

Condensateur réel ( $C, r$ )



En utilisant uniquement un bilan énergétique, établir la relation courant-tension aux bornes de ce condensateur.

$$\mathcal{P}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{C \cdot u^2}{2} \right) + r \cdot \left( \frac{u}{r} \right)^2 = u \cdot i$$

On peut donc écrire :

$$u \cdot i = u \cdot i = C \cdot u \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u^2}{r}$$

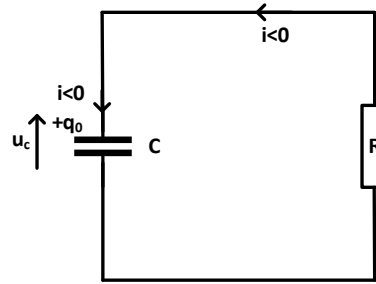
Soit encore en divisant par  $u$  :

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{r}$$

Comment se comporte-t-il en régime continu ?

On sait que le condensateur est une coupure dans le circuit en régime continu. Encore une fois, il ne reste que la résistance, ce que confirme l'équation ci-dessus lorsqu'on annule la dérivée temporelle.

### 3. Régime libre d'un circuit RC



Déterminer l'expression de  $u(t)$ .

On applique la loi des mailles :  $u_c + Ri = u_c + R \frac{dq}{dt} = u_c + RC \frac{du_c}{dt} = 0$

La solution de cette équation est une exponentielle décroissante :

$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

En déduire l'énergie perdue par le condensateur et celle consommée par effet Joule.

$$\mathcal{P}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{C \cdot u^2}{2} \right) = C \cdot u \cdot \frac{du}{dt}$$

Donc l'énergie cédée par le condensateur est :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} C \cdot u \cdot \frac{du}{dt} dt = \int_{U_0}^0 C \cdot u \cdot du = \frac{1}{2} C [u^2]_{U_0}^0 = -\frac{1}{2} C U_0^2$$

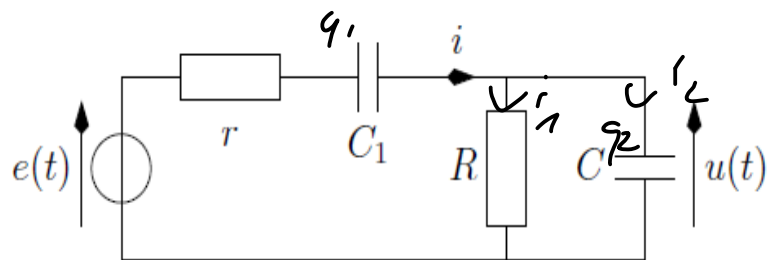
L'énergie reçue par la résistance et donc dissipée par effet Joule est :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{U_0^2}{R} e^{-2\frac{t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C U_0^2$$

On retrouve bien que l'énergie dissipée par effet Joule est celle qui était initialement contenue dans le condensateur, et qui a été cédée à la résistance lors de la décharge.

### 4. Mise en équation

équa diff. en  $u$  + constantes de l'équation.



But :

La question 2 nous donne directement lien entre  $i$  et  $u$  :

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

On applique ensuite la loi des mailles :

$$e(t) = r \cdot i + \frac{q_1}{C_1} + u$$

On sait que  $i = \frac{dq_1}{dt}$  donc pour obtenir une équation en  $i$  et  $u$  on dérive l'équation précédente :

$$\frac{de}{dt} = r \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_1} + \frac{du}{dt}$$

Soit en utilisant l'expression de  $i$  en fonction de  $u$  :

$$\frac{de}{dt} = r \cdot \frac{d}{dt} \left( C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \right) + \frac{1}{C_1} \left( C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \right) + \frac{du}{dt}$$

L'équation différentielle simplifiée et mise sous forme canonique donne :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{1}{rC} + \frac{1}{RC} + \frac{1}{rC_1} \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{rRC C_1} = \frac{1}{rC} \frac{de}{dt}$$

## 5. Valeurs initiales et finales

Valeurs de  $u$  et de  $i$  à  $t = 0$  : les condensateurs sont déchargés, la tension à leurs bornes est donc nulle. On en déduit qu'aucun courant ne circule dans  $R$ . On a :

$$i_0 = \frac{e_0}{r}$$

Et :

$$u_0 = 0$$

Valeurs de  $u$  et de  $i$  à quand  $t$  tend vers l'infini : les condensateurs sont alors équivalents à des interrupteurs ouverts.

$$i_\infty = 0$$

$$u_\infty = 0$$

## 6. Solutions bornées = solution qui ne diverge pas (qui ne tend pas vers l'infini quand $t$ tend vers l'infini)

Oscillateur harmonique amorti :

$$a \frac{d^2X}{dt^2} + b \cdot \frac{dX}{dt} + c \cdot X = 0$$

Equation caractéristique :  $ar^2 + b \cdot r + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot ac$$

Selon la valeur du discriminant il y a 3 régimes possibles :

- Si  $\Delta < 0$  : le régime est **pseudo-périodique**

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes  $r_1$  et  $r_2$  que l'on note :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-b^2 + 4 \cdot ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-b^2 + 4 \cdot ac}}{2a}$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$X(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot (A \cdot \cos vt + B \cdot \sin vt)$$

Pour que cette solution ne diverge pas il est nécessaire que  $-\frac{b}{2a} < 0$  soit **a et b de même signe**.

- Si  $\Delta = 0$  : le régime est **critique**

L'équation caractéristique admet une solution réelle  $r = -\frac{b}{2a}$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$X(t) = (At + B) \cdot e^{-\frac{b}{2a}t} \text{ même conclusion : } b \text{ et } a \text{ de même signe.}$$

- Si  $\Delta > 0$  : le régime est **apériodique**

L'équation caractéristique admet deux solutions réelles :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot ac}}{2a}$$

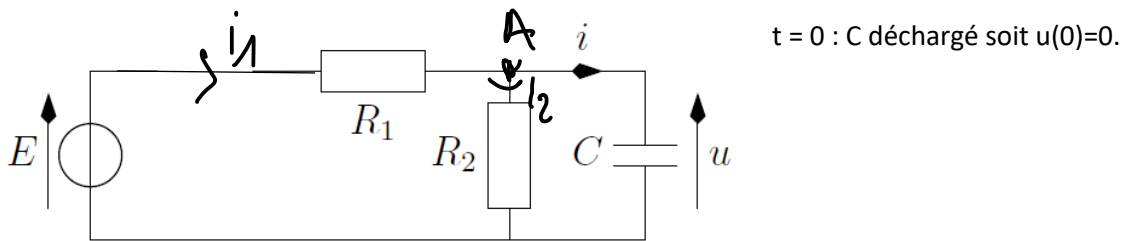
La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$X(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t}$$

Pour que la solution ne diverge pas il est nécessaire que les deux solutions soient négatives :  $r_2$  l'est de manière évidente. Mais si  $b < \sqrt{b^2 - 4 \cdot ac}$  la première est positive. Il faut donc que **a et c soient de même signe**.

**Pour avoir des solutions bornées il est nécessaire que a, b et c soit de même signe.**

## Exercice 2 : Charge d'un condensateur



- Equation différentielle satisfaite par la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur : on utilise à nouveau l'équation de l'ex 1.2 (que l'on retrouve en appliquant la loi des nœuds en A) :

$$i_1 = C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}$$

La loi des mailles s'écrit :

$$E = R_1 i_1 + u$$

Soit :

$$E = R_1 \left( C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2} \right) + u$$

En mettant l'équation sous sa forme canonique nous avons :

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} u = \frac{E}{CR_1}$$

- Constante de temps  $\tau$  ? Le terme devant  $u$  dans l'équation est homogène à l'inverse d'un temps. On peut écrire :

$$\tau = \frac{CR_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Expressions et allures de  $u(t)$  et  $i(t)$  ?

Equation avec second membre :  $u(t) = u^G(t) + u^P(t)$

$$u^G(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u^P(t) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

On a donc :

$$u(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

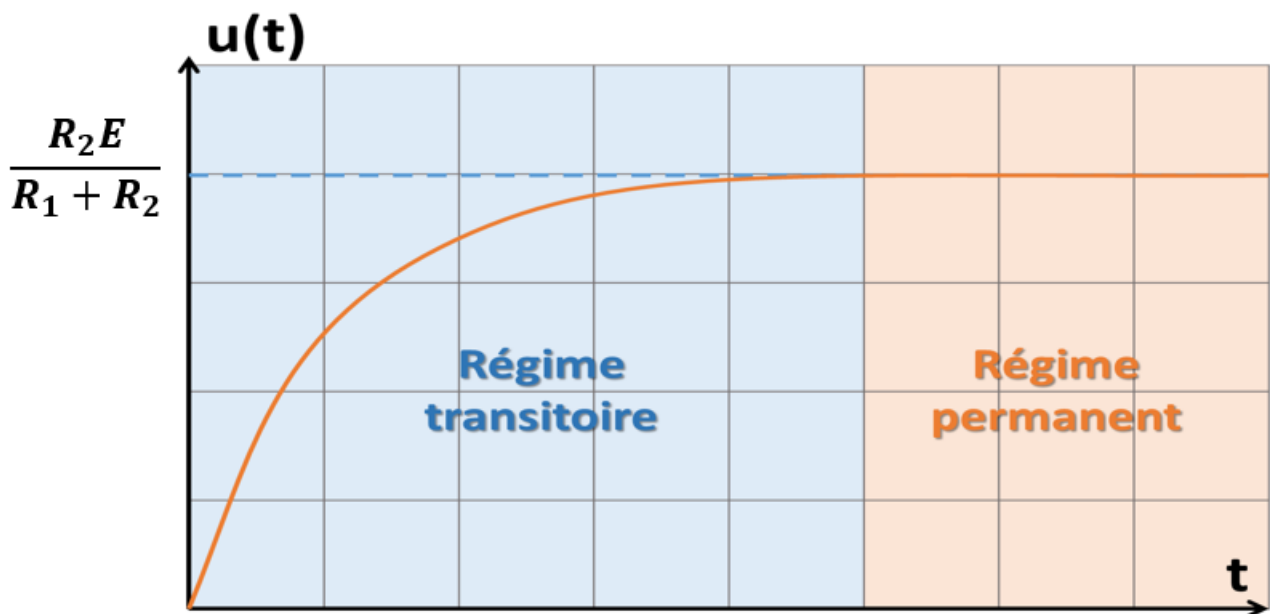
On peut alors déterminer la constante d'intégration avec la condition initiale  $u(0) = 0$  :

$$u(0) = \lambda e^0 + \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = \lambda + \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = 0$$

Soit  $\lambda = -\frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$

Finalement :

$$u(t) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

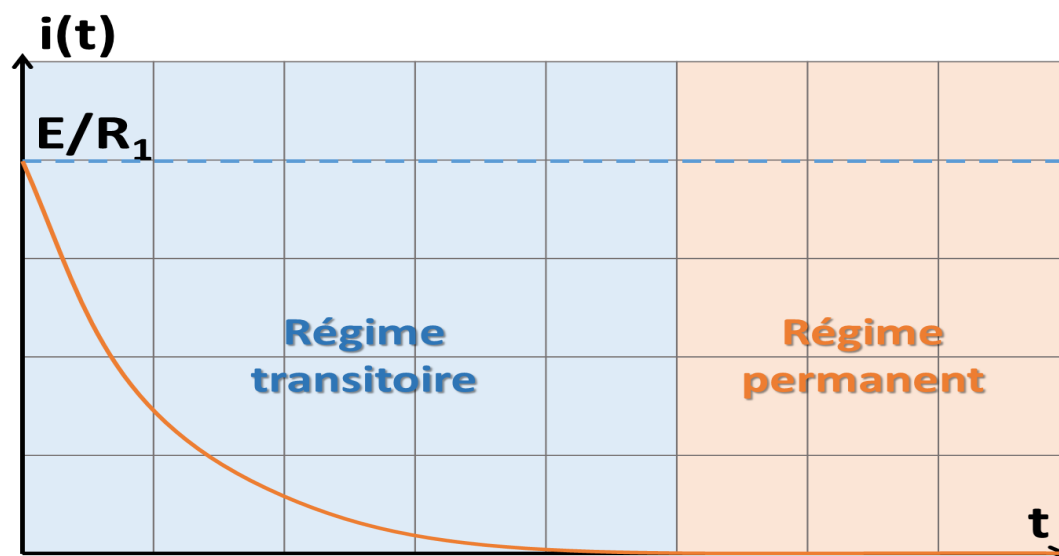


Le calcul de l'intensité se déduit directement de l'équation :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

Soit :

$$i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



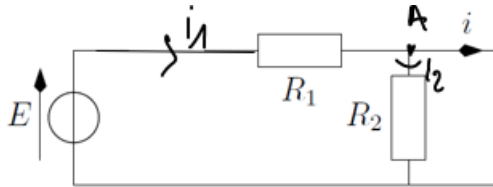
4. Valeurs asymptotiques  $u_\infty$  et  $i_\infty$  (régime permanent).

Les deux graphiques montrent que :

$$u_\infty = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

$$i_\infty = 0$$

5. Ces valeurs auraient pu être retrouvées à partir du circuit équivalent en régime permanent, où le condensateur est un interrupteur ouvert :

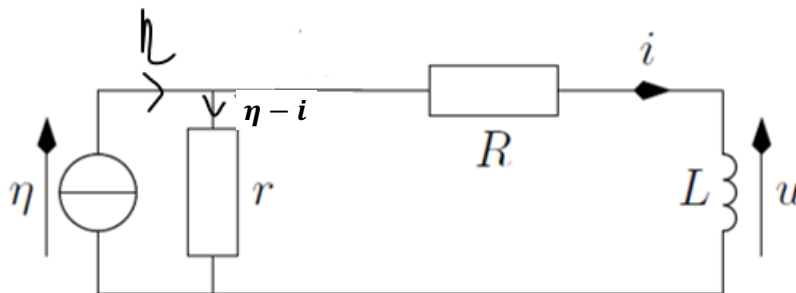


On voit que  $i$  est le courant qui circule (ou plutôt ne circule plus !!) dans la branche ouverte :  $i_\infty = 0$

Par ailleurs, le montage est devenu un diviseur de tension :

$$u_\infty = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

### Exercice 3 : Établissement du courant dans un circuit RL série



1. Intensité  $i(t)$  qui traverse la bobine :

Il est nécessaire de déterminer l'équation différentielle qui régit  $i$ . Pour cela, on applique la loi des mailles (ou loi d'additivité des tensions) :

$$Ri + L \frac{di}{dt} - r(\eta - i) = 0$$

Ce qui donne sous forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} i = \frac{r}{L} \eta$$

La résolution se fait par ajout de la solution générale ( $i^G = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ ) à la solution particulière ( $i^P = \frac{r}{R+r} \eta$ ). La constante

d'intégration se déduit des conditions initiales, elles-mêmes conditionnées par la **CONSERVATION DE L'ÉNERGIE** :

Aux bornes d'une bobine :

#### A RETENIR

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

**Conséquence : l'intensité du courant qui parcourt une bobine ne peut pas subir de discontinuité.**

Comme le courant est nul au départ (interrupteur ouvert) il va rester nul au moment où on ferme l'interrupteur.

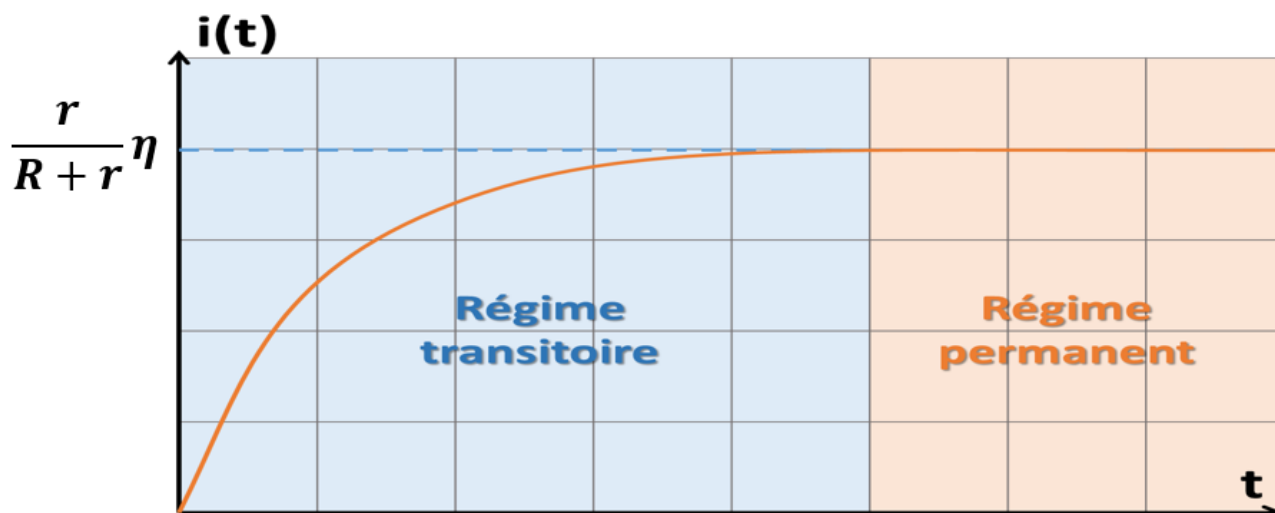
On a donc :

Avec

$$i(t) = \frac{r}{R+r} \eta \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

2. Courbe d'évolution de  $i$  :



3. Valeur de l'intensité  $i$  en régime permanent :

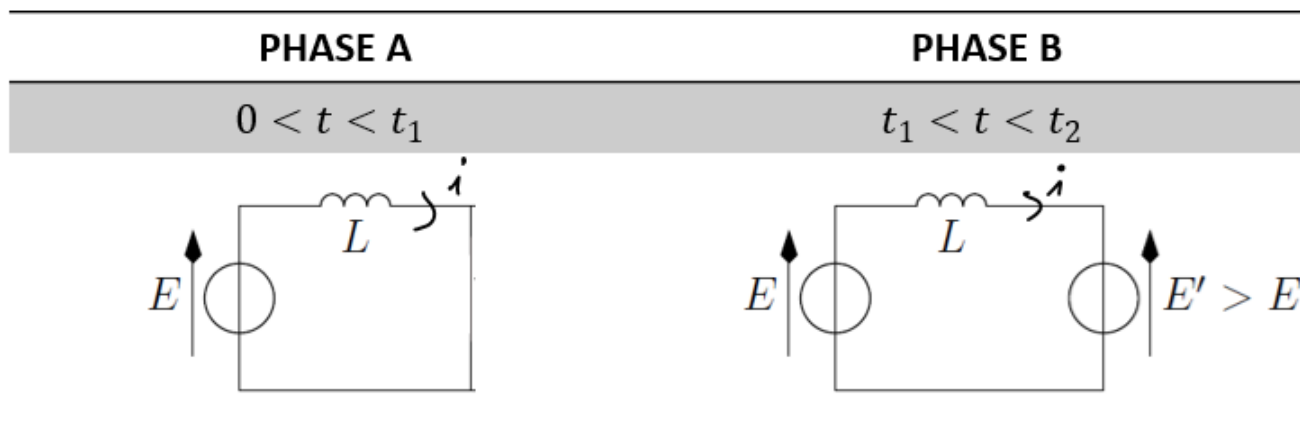
On voit qu'en régime permanent l'intensité vaut  $\frac{r}{R+r} \eta$  ; cela peut se retrouver à partir du circuit équivalent pour lequel la bobine est un fil et le montage devient un diviseur de courant (**à connaître ; cf chapitre 1 d'électricité**)

4. Comment se simplifie l'expression de  $i(t)$  dans le cas où la résistance interne du générateur est ~~négligeable~~ (très grande) devant la résistance  $R$  du circuit sur lequel il est branché ?

(attention : j'ai modifié la question)

Si  $r \gg R$  on a  $\frac{r}{R+r} \eta \approx \eta$ . On a alors l'établissement du courant d'une source de courant idéale.

#### Exercice 4 : Accumulation et restitution d'énergie



$t_2$  : moment pour lequel la puissance reçue par la source  $E'$  n'est plus positive (**soit moment où  $i$  s'annule**).

1. Étudier l'évolution de l'intensité du courant dans la bobine dans chaque phase de fonctionnement.

**Phase A :**

$$L \frac{di}{dt} = E$$

Soit

$$di = \frac{E}{L} dt$$

On intègre l'équation entre 0 (moment où i est nul par continuité de l'énergie) et  $t_1$  :

$$\int_0^i di = \int_0^{t_1} \frac{E}{L} dt$$

Soit

$$i(t) = \frac{E}{L} t$$

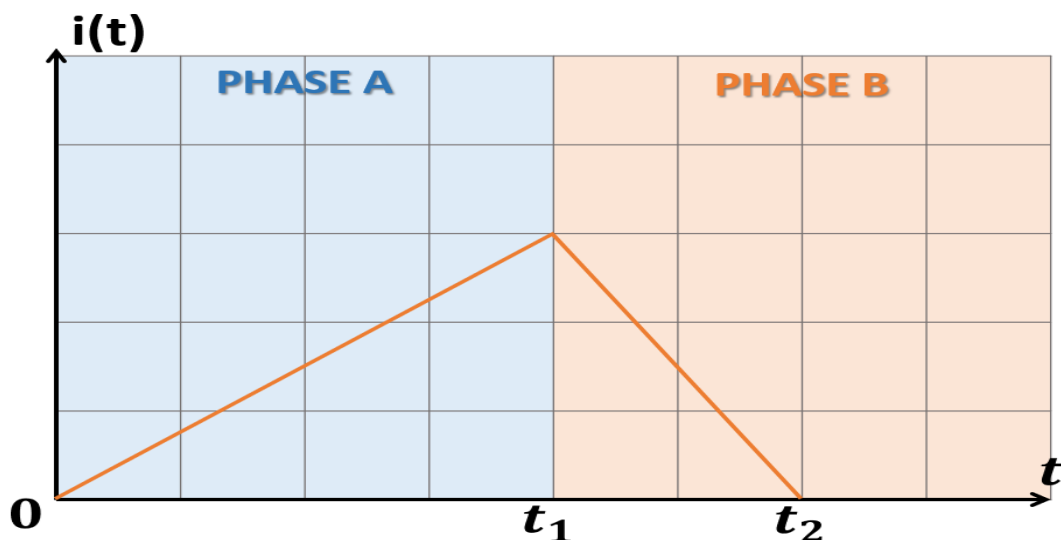
**Phase B :**

$$L \frac{di}{dt} = E - E'$$

$$\int_{i(t_1)}^i di = \int_{t_1}^t \frac{E - E'}{L} dt$$

Soit

$$i(t) = \frac{E}{L} t_1 + \frac{E - E'}{L} (t - t_1)$$



2. Déterminer la durée de chacune des deux phases.

La phase A ( $t_1$ ) est déterminée par l'utilisateur ;  $t_2$  est le moment où le courant s'annule. On a alors :

$$i(t_2) = \frac{E}{L} t_1 + \frac{E - E'}{L} (t_2 - t_1) = 0$$

La durée de la phase 2 est  $t_2 - t_1$  :  $t_2 - t_1 = \frac{E}{E' - E} t_1$

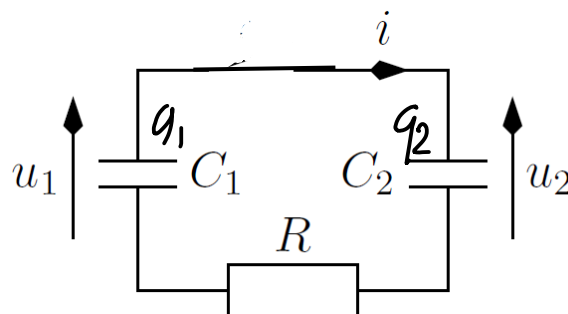


3.  $E' = 2E$  : d'après la question précédente les deux phases ont la même durée  $t_1$ . Énergie mise en jeu dans chacun des éléments au cours de chaque phase :

| PHASE A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | PHASE B                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Bobine à l'instant <math>t_1</math> :</b></p> $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{E}{L} t_1\right)^2 = \frac{E^2 t_1^2}{2L}$ <p>Le courant initial étant nul on a au cours de la phase A :</p> $\Delta \mathcal{E}_L = \frac{E^2 t_1^2}{2L}$ <p><b>Générateur 1 :</b></p> $\Delta \mathcal{E}_{Gén1} = \int_0^{t_1} E \cdot i \, dt = \int_0^{t_1} E \cdot \left(\frac{E}{L} t\right) dt = \frac{E^2 t_1^2}{2L}$ <p>Soit :</p> $\Delta \mathcal{E}_{Gén1} = \Delta \mathcal{E}_L$ <p>Le générateur 1 a intégralement transféré son énergie électrique à la bobine.</p> | <p><b>Bobine à l'instant <math>t_2</math> :</b> comme <math>i</math> s'est annulé, <math>\mathcal{E}_L(t_2) = 0</math> donc au cours de la phase B la bobine a perdu son énergie :</p> $\Delta \mathcal{E}_L = -\frac{E^2 t_1^2}{2L}$ <p><b>Générateur 1 :</b> en faisant le changement de variable <math>t' = t - t_1</math> on a :</p> $\Delta \mathcal{E}_{Gén1} = \int_0^{t_1} E \cdot i \, dt' = \int_0^{t_1} E \cdot \left(\frac{E}{L} t_1 - \frac{E}{L} t'\right) dt'$ <p>Soit :</p> $\Delta \mathcal{E}_{Gén1} = \frac{E^2 t_1^2}{L} - \frac{E^2 t_1^2}{2L} = \frac{E^2 t_1^2}{2L}$ <p>Comme la bobine, le générateur cède de l'énergie ... Qui récupère toute cette énergie ???</p> <p><b>Générateur 2 :</b> pour faciliter les calculs on fait le même changement de variable que précédemment, et on se place <b>en convention générateur</b> :</p> $\Delta \mathcal{E}_{Gén2} = - \int_0^{t_1} 2E \cdot i \, dt' = \int_0^{t_1} -2E \cdot \frac{E}{L} (t_1 - t') \, dt'$ <p>Soit :</p> $\Delta \mathcal{E}_{Gén2} = -\frac{E^2 t_1^2}{L}$ <p>En convention générateur, cela signifie que l'énergie est reçue.</p> |

4. Dans la phase B, on voit que l'énergie reçue par le générateur 2 est précisément l'énergie du générateur 1 et celle stockée par la bobine. La bobine sert à « obliger » pendant un temps le courant à circuler dans le sens des aiguilles d'une montre par inertie (la bobine s'oppose à la variation de  $i$ ).

### Exercice 5 : Régime libre d'un condensateur dans un circuit RC série



### ATTENTION

Ici nous avons orienté les condensateurs (charge  $q$ ) de manière à être cohérent avec le fléchage des tensions.

On a donc bien :  $q_1 = C_1 u_1$  et  $q_2 = C_2 u_2$

**MAIS POUR LE COURANT IL FAUT FAIRE ATTENTION :**  $i$  arrive sur le condensateur 2 et (quand il est positif), il augmente sa charge. C'est la convention habituelle :  $i = \frac{dq_2}{dt}$

Par contre pour le condensateur 1 c'est la convention inverse (le courant part de la plaque «  $q_1$  ») :  $i = -\frac{dq_1}{dt}$

Conditions initiales :

$$q_{1,0} = q_0$$

$$q_{2,0} = 0$$

1. Équation différentielle régissant l'évolution de l'intensité  $i$  :

On a ici une maille, la loi des mailles s'exprime très simplement :

$$u_2 + R \cdot i - u_1 = 0$$

Soit :

$$\frac{q_2}{C_2} + R \cdot i - \frac{q_1}{C_1} = 0$$

Pour obtenir une équation l'équation en  $i$  il suffit de dériver par rapport au temps (en faisant juste attention aux signes !) :

$$\frac{i}{C_2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_1} = 0$$

Soit sous forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2} i = 0$$

2. Résolution de l'équation différentielle :

On pose :

$$\tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

L'expression de  $i$  est alors :

$$i(t) = \lambda e^{-t/\tau}$$

Or à  $t=0$  on peut déduire l'intensité du courant de la tension aux bornes de la résistance :

$$u_R(0) = Ri(0) = u_1(0) - u_2(0) = \frac{q_0}{C_1}$$

$$i(t) = \frac{q_0}{RC_1} e^{-t/\tau}$$

On souhaite maintenant étudier l'évolution des charges dans les condensateurs.

3. Détermination de  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  :

$$i = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_1}{dt}$$

Donc :

$$dq_1 = -idt = -\frac{q_0}{RC_1} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$dq_2 = idt = \frac{q_0}{RC_1} e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

On intègre ces deux expressions entre l'instant 0 et l'instant  $t$  :

$$q_1 - q_0 = -\frac{q_0}{RC_1} \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{q_0 \tau}{RC_1} \left[ e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^t$$

Soit finalement :

$$q_1(t) = q_0 + \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right)$$

Et pour  $q_2$  :

$$q_2(t) = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right)$$

4. Valeurs finales  $q_{1,\infty}$  et  $q_{2,\infty}$  :

$$q_{1\infty} = q_0 - \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_0$$

$$q_{2\infty} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_0$$

5. Vérifier la conservation de la charge :

$$q_1(t) + q_2(t) = q_0 + \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) - \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) = q_0$$

La charge globale sur les deux condensateurs est constante, égale à la charge initiale.

### Aspects énergétiques

6. Bilan de puissance :

On multiplie la loi des mailles par  $i$  :

$$u_2 \cdot i + R \cdot i^2 - u_1 \cdot i = 0$$

On se rappelle que le condensateur 1 est fléché dans la convention générateur. Ici sa puissance est positive, donc cédée au circuit :

$$u_1 \cdot i = u_2 \cdot i + R \cdot i^2$$

Soit

$$\mathcal{P}_{cond1,cédée} = \mathcal{P}_{cond2,reçue} + \mathcal{P}_{Joule}$$

Le condensateur 1 cède, au cours du temps, une partie de son énergie électrique au condensateur 2, et une partie est dissipée dans la résistance.

7. Énergie totale échangée par C1 :

$$\Delta \mathcal{E}_{cond1} = \mathcal{E}_{\infty} - \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2C_1} (q_{\infty}^2 - q_0^2) = \left[ \frac{C_1}{2(C_1 + C_2)^2} - \frac{1}{2C_1} \right] q_0^2$$

Cette énergie est donc cédée (elle est négative)

Énergie totale échangée par C2 :

$$\Delta \mathcal{E}_{cond2} = \mathcal{E}_{\infty} - \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2C_2} q_{\infty}^2 = \frac{C_2}{2(C_1 + C_2)^2} q_0^2$$

Énergie totale reçue par les deux :

$$\Delta \mathcal{E}_{cond1} + \Delta \mathcal{E}_{cond2} = \left[ \frac{C_1}{2(C_1 + C_2)^2} - \frac{1}{2C_1} \right] q_0^2 + \frac{C_2}{2(C_1 + C_2)^2} q_0^2 = \left( \frac{1}{2(C_1 + C_2)} - \frac{1}{2C_1} \right) q_0^2 = -\frac{C_2}{2C_1(C_1 + C_2)} q_0^2$$

8. Énergie dissipée par effet Joule : c'est l'énergie perdue correspondant au calcul précédent :

$$\Delta \mathcal{E}_{Joule} = \frac{C_2}{2C_1(C_1 + C_2)} q_0^2$$

Retrouver ce résultat par un calcul direct.

$$\Delta \mathcal{E}_{Joule} = \int_0^{\infty} R \cdot i^2 dt = \int_0^{\infty} R \cdot \left( \frac{q_0}{RC_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 dt = \frac{q_0^2}{RC_1^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{q_0^2 \tau}{2RC_1^2} \left[ e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{\infty} = \frac{q_0^2 \tau}{2RC_1^2}$$

Avec :

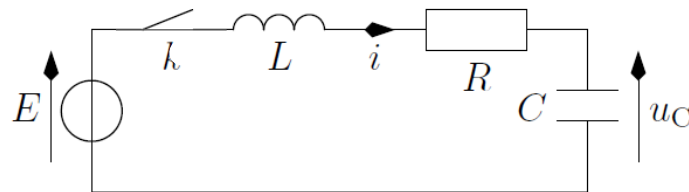
$$\tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

On a finalement :

$$\Delta \mathcal{E}_{Joule} = \frac{C_2}{2C_1(C_1 + C_2)} q_0^2$$

On retrouve bien le même résultat.

### Exercice 6 : Circuit RLC série



On donne  $R = 50 \, \Omega$ ,  $C = 200 \, \mu\text{F}$  et  $L = 10\text{mH}$ .

1. Conditions initiales :
  - Continuité de l'énergie du condensateur :  $u_C(0)=0$
  - Continuité de l'énergie de la bobine :  $i(0) = 0$
  - On en déduit  $du_C/dt=1/Cdq/dt(0)=i(0)/C=0$

2. Equation différentielle régissant l'évolution de  $u_C$  :  
Loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L = E$$

Soit :

$$\frac{q}{C} + Ri + L \frac{di}{dt} = E$$

Avec  $i = \frac{dq}{dt}$  :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$$

Et enfin avec  $q = Cu_C$  :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Forme canonique :

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \frac{E}{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

3. En déduire l'expression de  $u_C$ . Tracer l'allure de son évolution temporelle.

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,14 < \frac{1}{2}$$

Par conséquent le régime est **apériodique**.

L'expression de  $u_C$  est la somme de la solution générale du régime apériodique et la solution particulière correspondant au régime permanent :

$$u_C(t) = u^{aperiodique}(t) + E = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t} + E$$

$$r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Les constantes A et B peuvent être déduites des conditions initiales :

$$u_C(0) = A + B + E = 0$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = r_1 A + r_2 B = 0$$

On en déduit :

$$A = \frac{E}{1 - \frac{r_2}{r_1}} \text{ et } B = -\frac{r_1}{r_2} \frac{E}{1 - \frac{r_2}{r_1}}$$

4. Equation différentielle régissant l'évolution de  $i(t)$  :

On a :

$$\frac{q}{C} + Ri + L \frac{di}{dt} = E$$

Pour obtenir une équation en  $i$ , il faut dériver l'équation par rapport au temps ( $i = \frac{dq}{dt}$ ) :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Les constantes de l'équation différentielle sont les mêmes que pour  $u_C$ .

5. Exprimer  $i(t)$  et tracer son allure.

$$i(t) = A' \cdot e^{r_1 t} + B' \cdot e^{r_2 t}$$

On sait que  $i(0) = 0$ . A l'instant initial, on peut également calculer  $\frac{di}{dt}$  car la tension aux bornes de la bobine est E (condensateur déchargé, tension nulle aux bornes de la résistance) :  $\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$

Soit :

$$A' + B' = 0$$

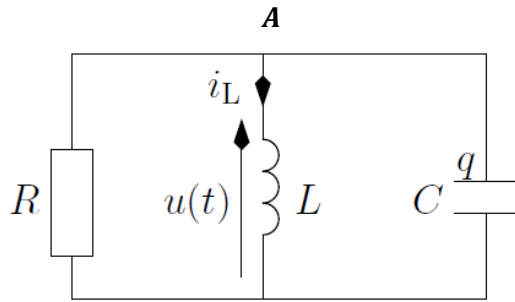
$$r_1 A' + r_2 B' = \frac{E}{L}$$

Soit :

$$A' = \frac{E}{L(r_1 - r_2)} \text{ et } B' = -\frac{E}{L(r_1 - r_2)}$$

$$i(t) = \frac{E}{L(r_1 - r_2)} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

## Exercice 7 : Régime libre d'un circuit « bouchon »



$R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 100 \text{ mH}$ , et  $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ .

Conditions initiales :

$$q(t=0) = q_0$$

$$i_L(t=0) = q_0 / 2RC.$$

- Equation différentielle pour  $u(t)$  :

Ici les éléments sont en **dérivation**. La loi la plus appropriée est donc la loi des nœuds en A :

$$i_R + i_L + i_C = 0$$

Le but est maintenant de tout exprimer en fonction de  $u$  :

$$\frac{u}{R} + i_L + C \frac{du}{dt} = 0$$

Concernant  $i_L$  on sait qu'on a aux bornes de l'inductance :  $u = L \frac{di}{dt}$  ; pour faire apparaître ce terme dérivé, il faut donc dériver l'ensemble de l'équation par rapport au temps, ce qui donne (sous forme canonique) :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

On reconnaît l'oscillateur amorti que l'on écrit habituellement sous la forme :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

- Calculer la valeur du facteur de qualité  $Q$  et de la pulsation propre  $\omega_0$ . Quel est le type de régime du circuit ?

On a donc par identification terme à terme :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \text{ soit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 10 > \frac{1}{2}$$

On est donc dans un régime pseudo-périodique :

Les racines de l'équation caractéristique sont du type :  $r_i = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$$\text{Posons : } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On a alors :  $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t)$

- Déterminer les deux conditions initiales à prendre en compte.

Conditions initiales indiquées dans l'énoncé :

$$q(t=0) = q_0$$

$$i_L(t=0) = q_0 / 2RC$$

Cela signifie :  $u(0) = q_0 / C$  et  $du/dt(0) = i(0)/L = q_0 / 2RLC$

- Déterminer l'expression complète de  $u(t)$ .

On peut déterminer les constantes A et B avec les conditions initiales

$$u(0) = A = \frac{q_0}{C}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot (-A\omega \cdot \sin \omega t + B\omega \cdot \cos \omega t)$$

$$\frac{du}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\omega = \frac{q_0}{2RLC}$$

$$B = \frac{q_0}{\omega} \left( \frac{1}{C\tau} + \frac{1}{2RLC} \right) = \frac{q_0}{\omega} \left( \frac{1}{2RC^2} + \frac{1}{2RLC} \right)$$

5. Allure de  $u(t)$  : sinusoïde amortie (cf cours)

$$\text{pseudo-période : } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

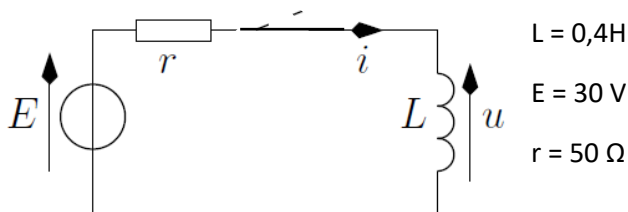
6. Calculer l'écart relatif de la pseudo-période  $T$  à la période propre  $T_0$ . Commenter.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Avec  $Q=10$

Le calcul donne :  $T \approx T_0$

### Exercice 8 : surtension aux bornes d'une bobine



1. Établir l'expression de la tension  $u(t)$  aux bornes de la bobine.

Loi des mailles :  $E = r \cdot i + u$

Comme la tension  $u$  est celle aux bornes de la bobine on a :  $u = L \frac{di}{dt}$

Donc la méthode est toujours la même : on dérive l'équation par rapport au temps ...

$$\frac{du}{dt} + \frac{r}{L}u = 0$$

2. Au bout de combien de temps peut-on dire que le régime permanent est atteint ?

La constante de temps est ici  $\tau = \frac{L}{r}$  ; On considère généralement que le régime permanent est atteint pour un temps égal à  $5\tau$ .

3. On suppose, après avoir atteint le régime permanent, que l'on tente d'ouvrir l'interrupteur. Pourquoi cela pose-t-il un problème avec le modèle d'interrupteur utilisé dans le schéma ?

Le problème posé est que par continuité de l'énergie dans la bobine, le courant ne peut pas s'annuler instantanément : la bobine va « forcer » le courant à circuler : cela peut se traduire par un arc électrique au niveau de l'interrupteur (« mini éclair » qui traduit le passage du courant au niveau de l'interrupteur ouvert).

Dans les premiers instants de l'ouverture de l'interrupteur, celui-ci se modélise par un condensateur de capacité  $C = 10 \text{ pF}$ . Pour cette partie, on positionne l'origine des temps  $t = 0$  à l'ouverture de l'interrupteur.

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$ . Commenter la valeur du facteur de qualité.

C'est l'équation classique du circuit RLC (cf cours ou exos précédents) :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

Le facteur de qualité a pour valeur :  $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 4000 > 1/2$

C'est un régime pseudo-périodique. Le facteur de qualité étant très grand, l'amortissement sera très lent.

5. Montrer que  $u(0^+) = 0$  et  $du/dt(0^+) = E / RC$ .

$u = L \frac{di}{dt}$  ; le régime permanent ayant été atteint, on suppose que la valeur de  $i$  ne varie plus dans la bobine au moment où on ouvre l'interrupteur :  $u(0) = 0$

Au niveau du condensateur :  $i = C \frac{du}{dt}$  donc  $\frac{du}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C} = \frac{E}{rC}$

6. Déterminer, en justifiant l'approximation choisie, l'expression de  $u(t)$ .

Etant donnée la grande valeur de  $Q$  on peut assimiler le montage à un oscillateur harmonique :

$$u(t) = A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t$$

Avec les conditions initiales :

$$u(t) = \frac{E}{rC\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t$$

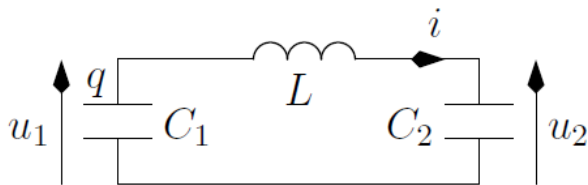
7. Quelle est la tension maximale atteinte ? À quel instant ? Conclure sur le phénomène électrique qui risque de se produire lors de cette expérience.

Le sinus passe par son maximum +1 lorsque  $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$  soit  $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$  ; on a alors :

$$u_{max} = \frac{E}{rC\omega_0} = 120000 \text{ V}$$

La surtension est énorme ! Il y a donc risque d'arc électrique et d'endommagement de l'installation.

### Exercice 9 : Circuit oscillant



Conditions initiales :  $C_1$  de charge  $q_0$  ;  $C_2$  déchargé.

$C_1 = C_2 = C$ .

On rappelle également que :  $i = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq}{dt}$   
(en raison des conventions choisies)

1. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de  $i(t)$ .

Loi des mailles :

$$L \frac{di}{dt} + u_2 - u_1 = 0$$

Soit :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q_2}{C} - \frac{q}{C} = 0$$

On dérive par rapport au temps :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{2}{LC} i = 0$$

2. Déterminer et tracer  $i(t)$ .



On obtient donc l'équation de l'oscillateur harmonique soit :

$$i(t) = A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t$$

Avec :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$

La détermination des constantes se fait à partir des conditions initiales :

$i(0) = 0$  par continuité de l'énergie dans la bobine

$$u_L = L \frac{di}{dt} = u_1 - u_2 \text{ soit à } t=0 : \frac{di}{dt}(0) = \frac{q_0}{LC}$$

On a donc :

$$i(t) = \frac{q_0}{\omega_0 LC} \sin \omega_0 t$$

3. En déduire les expressions de  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  et tracer les allures des graphes correspondants.

$$i(t) = -C \frac{du_1}{dt} = C \frac{du_2}{dt}$$

Calcul de  $u_1$  :

$$du_1 = -C i dt$$

On intègre entre l'instant  $t=0$  et un instant  $t$  quelconque :

$$\int_{u_{10}}^{u_1} du_1 = -\frac{q_0}{\omega_0 LC} \int_0^t \sin \omega_0 t = \frac{q_0}{\omega_0^2 LC} [\cos \omega_0 t]_0^t = \frac{q_0}{2C} (\cos \omega_0 t - 1)$$

Soit finalement :

$$u_1(t) = \frac{q_0}{C} + \frac{q_0}{2C} (\cos \omega_0 t - 1) = \frac{q_0}{2C} (\cos \omega_0 t + 1)$$

De même :

$$u_2(t) = \frac{q_0}{2C} (1 - \cos \omega_0 t)$$

4. Effectuer un bilan des puissances reçues par la bobine et par l'ensemble des deux condensateurs.

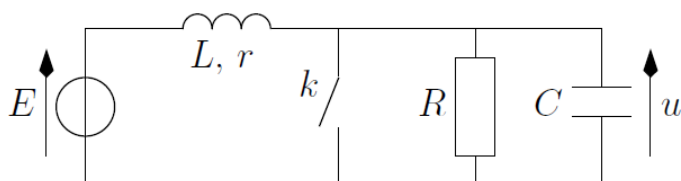
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u_1^2 + \frac{1}{2} C u_2^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{q_0}{\omega_0 LC} \sin \omega_0 t \right)^2 + \frac{1}{2} C \left[ \frac{q_0}{2C} (\cos \omega_0 t + 1) \right]^2 + \frac{1}{2} C \left[ \frac{q_0}{2C} (1 - \cos \omega_0 t) \right]^2$$

L'expression se simplifie :

$$\mathcal{E} = \frac{q_0^2}{4C} (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t + 1) = \frac{q_0^2}{2C}$$

L'énergie est constante, égale à l'énergie initialement stockée dans le condensateur chargé.

### Exercice 10 : surtension aux bornes d'un condensateur



L'interrupteur étant fermé depuis très longtemps, on l'ouvre à l'instant  $t = 0$ .

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur.

L'association R,C en parallèle a été vue plusieurs fois dans les exercices précédents. La loi des nœuds donne :

$$i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$$

On peut alors appliquer la loi des mailles :

$$E = \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{R} u + rC \frac{du}{dt} + u$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{r}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1 + \frac{r}{R}}{LC} u = \frac{E}{LC}$$

2. Déterminer les deux conditions initiales  $u(t=0^+)$  et  $du/dt(t=0^+)$ .

L'interrupteur était fermé initialement, par continuité de l'énergie électrique dans le condensateur on a donc :

$$u(0) = 0$$

De même, le courant ne peut pas subir de discontinuité en raison de la bobine :

$$i(0) = \frac{E}{r} = C \frac{du}{dt}(0)$$

Donc

$$\frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{rC}$$

3. À l'aide d'un schéma équivalent, établir la tension  $u_\infty$  aux bornes du condensateur une fois le régime permanent pour  $t > 0$  atteint.

En régime permanent, la bobine est un fil, le condensateur un interrupteur ouvert. Le montage devient alors un diviseur de tension :

$$u_\infty = \frac{R}{R + r} E$$

Afin de ne pas endommager le condensateur lors de la fermeture de l'interrupteur, on souhaite que la tension  $u(t)$  à ses bornes ne dépasse jamais  $u_\infty$ .

4. Quelle relation entre  $r$ ,  $L$ ,  $C$  et  $R$  doit alors être vérifiée ?

La condition imposée interdit le régime pseudo-périodique, pour lequel les oscillations dépasseront la valeur du régime permanent. On doit donc avoir pour l'équation caractéristique :  $\Delta \geq 0$

Soit :

$$\left( \frac{r}{L} + \frac{1}{RC} \right)^2 \geq 4 \frac{1 + \frac{r}{R}}{LC}$$

5. Que devient-elle si l'on souhaite de plus atteindre le régime permanent le plus rapidement possible ?

C'est le régime critique qui permet d'atteindre le plus rapidement le régime permanent. Alors le discriminant est nul :

$$\left( \frac{r}{L} + \frac{1}{RC} \right)^2 = 4 \frac{1 + \frac{r}{R}}{LC}$$

6. Établir dans ce dernier cas l'expression de  $u(t)$  et tracer son allure.

$$u(t) = u_\infty + (At + B) \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

### Exercice 11 : Résolution de problème : la foudre

Le temps caractéristique de l'éclair est de l'ordre de  $\tau = RC$ , le régime transitoire étant de l'ordre de  $5\tau$ .

Pour calculer C, on utilise l'énergie électrique :

$$\frac{1}{2}CU^2 = 50.10^6 \text{ J}$$

Avec  $U = 100.10^6 \text{ V}$

On obtient :  $C = 10^{-8} \text{ F}$

Par ailleurs la résistance peut être obtenue par la relation :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10^8}{3.10^4} \simeq 3000 \Omega$$

La durée de l'éclair est donc de l'ordre de :

$$\tau = 5RC = 15000 \cdot 10^{-8} = 0,15 \text{ ms}$$