Colle sur le chapitre n°11 « Continuité »

En vrac : vrai ou faux ?

1) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
2) Si $\lim_{x\to a} u(x) = 1$ et $\lim_{x\to a} v(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 1$
3) Si f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et T-périodique alors f est bornée.

Exercice n°1

Pour x$\in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on pose f(x) $= \frac{\sin(3x)-\sin(2x)}{\sin(x)}$

1) Exprimer f sans quotient et en déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$
2) Justifier l'existence de $\alpha = inf_{x\in]0,\pi[}f$ et $\beta = sup_{x\in]0,\pi[}f$

Exercice n°2

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}$ 2. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+|x|}{2x^2-|x|}$ 3. $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-16}{x^3-8}$ 4. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$

Exercice n°3

Soit f :x$\to \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à préciser.

Exercice n°4

On cherche les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \cos(x)\, f(x)$ $(*)$

1) Montrer que f_1(x) $= \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et est solution de $(*)$
2) En déduire que pour tout a$\in \mathbb{R}$, il existe au moins une fonction f_a solution de $(*)$ et telle que $f_a(0)=a$
3) Réciproquement, soit f solution de $(*)$
   a) Montrer que si x=nπ avec n entier non nul, alors f(x)=0
   b) Montrer que : $\forall$x $\in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, $2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \sin(x)\, f(\frac{x}{2^n})$
   c) Pour x$\in \mathbb{R}^*$, $déterminer$ $\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$, en déduire f(x) en fonction de x, et conclure !

Problème:

On considère la fonction f définie par : *f(x)* $= \frac{ln\,(4-3x)}{x^2-x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
4) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en x=0 ?