Chapitre 2 : « Intégrales dites généralisées »

I. Généralités

On s'intéresse ici à un intervalle I du type [a,b[avec a$\in \mathbb{R}$, et b$\in \overline{\mathbb{R}}$ (et a<b)

1) Définition :

Soit f$\in \mathcal{CM}$([a,b[,K)

On dit que l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge si la fonction x$\to \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en b.

Dans ce cas, on note $\int_{[a,b[} f$ ou $\int_{[a,b[} f\ (t)dt$ cette limite

Dans le cas contraire, on dit que $\int_{[a,b[} f$ diverge.

Vocabulaire : $\int_{[a,b[} f$ **est appelée intégrale généralisée ou intégrale impropre**

La caractère convergent ou divergent d'une telle intégrale correspond à sa « nature ».

2) Premières propriétés

a) Caractère « local » de la nature d'une intégrale

Soit f$\in \mathcal{CM}$([a,b[,K), et c$\in$[a,b[

Alors : $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{[c,b[} f$ sont de même nature.

De plus : Si elles convergent, on a : $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c[} f + \int_{[c,b[} f$

Démonstration :

En utilisant la relation de Chasles : $\forall x \in [a,b[, \int_{[a,x[} f = \int_{[a,c[} f + \int_{[c,x[} f$

Les fonctions $\int_{[a,x[} f$ *et* $\int_{[c,x[} f$ *diffèrent à une constante près.*

Elles sont donc de même nature.

b) Si f$\in \mathcal{CM}$([a,b[,K), et si $\int_{[a,b[} f$ converge alors : $\int_{[x,b[} f \to 0$ *lorsque* $x \to b$

c) Si f$\in \mathcal{CM}$([a,b],K), alors $\int_{[a,b[} f$ converge

De plus : $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$

3) Notation

On notera le plus souvent : $\int_a^b f$ l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ (la propriété du 2)c) assurant la cohérence de la notation avec celle vue en première année pour f$\in$ $\mathcal{CM}$([a,b],K))

4) Proposition

Soit f$\in \mathcal{CM}$([a,b[,K), et F une primitive de f, alors :

L'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement si F possède une limite finie en b

De plus : $\int_a^b f = \lim\limits_{x\to b} F(x)$ – F(a)

Démonstration : $\forall x \in [a,b[, \int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$...

5) Premiers exemples :
Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et calculer sa valeur.
Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$ dt converge et calculer sa valeur.

Soit : $\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x =$ 1-e^{-x} or $\lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x}$ existe et vaut 1.
Donc : l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et a pour valeur 1.

Soit : $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)}$dt, on a : $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}\ avec\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
Rapidement : a=1, 0=a+b donc b=-1 et par imparité c=0, d'où $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} + \frac{-t}{1+t^2}$
Soit $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)}$dt $= [\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)]_1^x = \ln(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) + \frac{1}{2}\ln(2)$
Or $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2)$
Donc : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$ dt converge et a pour valeur $\frac{1}{2}\ln(2)$

6) Remarques (importantes)
A l'instar des séries, la condition $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ n'est pas suffisante pour que $\int_a^{+\infty} f$ converge.
En effet, montrer que la fonction f définie par f(t) $= \frac{1}{t}$, vérifie $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ et pourtant montrer que : $\int_1^{+\infty} f$ diverge.

Et « pire », la convergence de $\int_a^{+\infty} f$ n'entraîne pas que : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (Penser aux signaux sinusoïdaux…)

7) Une méthode pour démontrer la divergence d'une intégrale
Pour a>0, par la relation de Chasles, on a : $\sum_{n=1}^{N} \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_a^{(N+1)a} f$
Donc si l'intégrale converge, on récupère que la série converge et par contraposée, si la série diverge, on récupère que l'intégrale diverge.

Exercice :
1) En étudiant la série de terme général : $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{sint}{t}\right|$, montrer que l'intégrale $\int_\pi^\infty \left|\frac{sint}{t}\right|$dt diverge.
2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(t)\,dt$ diverge mais que la série de terme général $\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \cos(t)\,dt$ est convergente. Que prouve ce résultat par rapport à la méthode du 7) ?

8) Extensions aux cas]a,b] et]a,b[
a) Cas]a,b]
La définition précédente s'adapte sans difficultés.
Soit f∈ $\mathcal{CM}$(]a,b],K)
On dit que l'intégrale $\int_{]a,b]} f$ converge si la fonction x→ $\int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie en a.

Dans ce cas, on note $\int_{]a,b]} f$ ou $\int_{]a,b]} f\,(t)dt\ ou$ encore $\int_a^b f$ cette limite

Dans le cas contraire, on dit que $\int_{[a,b[} f$ diverge.

b) Cas]a,b[
Soit f∈ $\mathcal{CM}$(]a,b[,K)
On dit que l'intégrale $\int_{]a,b[} f$ converge s'il existe c∈$]a,b[\ tel\ que$ la fonction x→ $\int_x^c f(t)dt$ admet une limite finie en a ET tel que la fonction x→ $\int_c^x f(t)dt$ admet une limite finie en b
Dans ce cas, on note $\int_{]a,b[} f$ ou $\int_{]a,b[} f\,(t)dt\ ou$ encore $\int_a^b f$ cette limite

Dans le cas contraire, on dit que $\int_{]a,b[} f$ diverge.

Exemple : Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et calculer sa valeur.
Tout d'abord, on fixe x>0, et on définit $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ = Arctanx
or $\lim_{x\to+\infty} Arctanx = \frac{\pi}{2}$
Donc en faisant tendre x vers l'infini, on obtient que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge, par parité , $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge également et a pour valeur : π

II. Cas des fonctions à valeurs réelles positives et intégrales de référence

Comme pour les séries numériques, on étudie plus particulièrement le cas des fonctions réelles positives, d'autant plus qu'en toute fin de chapitre, on abordera la notion d'*intégrabilité* qui se ramènera justement à des fonctions positives…

1) Proposition
Soit a∈ ℝ, et b∈ $\overline{\mathbb{R}}$
Soit f∈ $\mathcal{CM}$([a,b[,K) **à valeurs positives.**
On dit que l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge si la fonction x→ $\int_a^x f(t)dt$ est majorée sur [a,b[
L'intégrale $\int_{[a,b[} f$ diverge si et seulement si $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt = +\infty$

Etude d'un exemple : Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente.

2) Comparaison
Soit a∈ ℝ, et b∈ $\overline{\mathbb{R}}$
Soit (f,g) ∈ $\mathcal{CM}$([a,b[,ℝ)^2 vérifiant : 0≤ $f \leq g$
Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.

Démonstration : Pour x∈[a,b[, on pose F(x) = $\int_a^x f$ *et G(x) =* $\int_a^x g$
Par croissance de l'intégrale, et du fait que 0≤ $f \leq g$*, on sur [a,b[: 0≤* $F(x) \leq G(x)$
Comme $\int_a^b g$ *converge, alors G est majorée, donc F est aussi majorée, et admet une limite finie en b, donc* $\int_a^b f$ *converge.*

3) Intégrales dites de référence

a) Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}$dt converge si et seulement si $\boldsymbol{\alpha}$>0

Démonstration :
On a : t→ $e^{-\alpha t}$ est continue et positive.
Soit x>0
1er cas : $\alpha = 0$, alors $e^{-\alpha t} = 1$ et $\int_0^x e^{-\alpha t}$dt $= \int_0^x 1dt =$ x→ $+\infty$, donc l'intégrale diverge.

2ème cas : $\alpha \neq 0$, $\int_0^x e^{-\alpha t}$dt $= \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\ si\ \alpha > 0 \\ +\infty\ si\ \alpha < 0 \end{cases}$

b) Intégrales de Riemann

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\boldsymbol{\alpha}$>1
L'intégrale $\int_0^{+1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\boldsymbol{\alpha}$<1

Démonstration : Même type de raisonnement que précédemment…

III. <u>Propriétés</u>

Les propositions suivantes généralisent les propriétés déjà vues sur les intégrales en première année aux intégrales généralisées.

1) Premières propriétés

-Soit f∈ $\mathcal{CM}$(I,K) telle que $\int_I f$ converge alors f→ $\int_I f$ est linéaire

-Si f∈ $\mathcal{CM}$(I,ℂ) alors $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I Re(f)$ converge et $\int_I Im(f)$ converge.
On a alors $\int_I f = \int_I Re(f) + i \int_I Im(f)$

-Soit f∈ $\mathcal{CM}$(I,K) telle que $\int_I f$ converge et si f≥0 alors $\int_I f$ ≥0

2) Proposition importante :

Soit f : I→ ℝ, une fonction continue et positive, si $\int_I f = 0$ alors f est la fonction nulle.

Démonstration :
Comme f est continue sur I, f admet sur I des primitives, soit F(x)=$\int_a^x f(t)dt$, F est dérivable sur I et de dérivée f(x).
Or F est une fonction constante égale à 0, donc sa dérivée est nulle, ainsi f=0

3) Remarques :

-Soit f∈ $\mathcal{CM}$(I,K) telle que $\int_I f$ converge, si J est un sous-intervalle de I d'intérieur non vide , alors $\int_J f$ converge

-Soit f∈ $\mathcal{CM}$(I,K) telle que $\int_I f$ converge, alors la relation de Chasles reste valide pour tout x,y,z de I.

IV. <u>Intégrabilité</u>

I désigne un intervalle de ℝ d'intérieur non vide.

1) Définition

On dit que f∈ $\mathcal{CM}$(I,K) est intégrable sur I, ou que l'intégrale $\int_I f$ converge absolument, si l'intégrale $\int_I |f|$ converge.

Notation : On note L^1(I,K) l'ensemble des fonctions intégrables sur I.

2) Proposition

L'ensemble L^1(I,K) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}$(I,K)

3) Théorème : Inégalité triangulaire

Pour tout f∈ L^1(I,K), on a $|\int_I f| \leq \int_I |f|$

Démonstration : Il suffit de se souvenir de celle de l'an passé :

On a : $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$*, par conservation de l'ordre,* $-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|$

Donc : $|\int_I f| \leq \int_I |f|$

4) Théorème

Soit f∈ L^1(I,K) alors $\int_I f$ converge

Démonstration : Utiliser l'inégalité triangulaire…

5) Caractère local de l'intégrabilité

Soit a∈ ℝ, et b∈ $\overline{\mathbb{R}}$ tel que a<b

Soit f∈ $\mathcal{CM}([a,b[,K)$ vérifiant : alors pour tout c∈[a,b[, la fonction f est intégrable si et seulement si elle l'est sur [c,b[

6) Théorème

Soit a∈ ℝ, et b∈ $\overline{\mathbb{R}}$ tel que a<b, soit f, $g \in \mathcal{CM}([a,b[,K)^2$

Si f = O_b(g) et si g est intégrable sur [a,b[alors f est intégrable sur [a,b[

Si f $\sim_b$g alors l'intégrabilité de f sur [a,b[équivaut à celle de g.

Etude d'un exercice :

Soit x>0, montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

1er cas : x≥1

On a : t→ $t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur [0,+∞[

De plus : $t^2 t^{x-1}e^{-t} \to 0$ *lorsque* $t \to +\infty$, donc $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ intégrable en +∞ par comparaison avec une intégrale de Riemann.

2ème cas : x<1

On a toujours : $t^2 t^{x-1}e^{-t} \to 0$ *lorsque* $t \to +\infty$, donc $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ intégrable $+\infty$ par comparaison avec une intégrale de Riemann.

Et : $t^{x-1}e^{-t} \sim_0 \frac{1}{t^{x-1}}$ intégrable en 0 par comparaison avec une intégrale de Riemann.

V. Méthodes de calculs effectifs

1) Intégration par parties

Convention dite des crochets : Pour $-\infty \leq a<b \leq +\infty$, et si h est une fonction continue sur un intervalle d'extrémités a et b, alors le crochet $[h]_a^b$ converge si et seulement si h possède des limites finies en a et en b.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions C^1 sur un intervalle d'extrémités a et b avec $-\infty \leq a<b \leq +\infty$,

Si le crochet $[fg]_a^b$ converge, alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et en cas de convergence, on a : $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$

Exemple : Calculer $I= \int_1^{+\infty} \frac{Arctan(t)}{t^2} dt$

On pose u=Arctant et $v'=\frac{1}{t^2}$ donc $v=\frac{-1}{t}$

On a : u et v C^1 sur $[1,+\infty[$

$I(x)=[\frac{-Arctant}{t}]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt = \frac{-Arctanx}{x} + \frac{\pi}{4} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)} dt$ or $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} + \frac{-t}{1+t^2}$

Don $I(x) = \frac{-Arctanx}{x} + \frac{\pi}{4} + \int_1^x \frac{1}{t} + \frac{-t}{1+t^2} dt = \frac{-Arctanx}{x} + \frac{\pi}{4} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(2)$

En passant à la limite, $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$

2) Changement de variables

Soit $f \in C(]a,b[,K)$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une fonction de classe C^1, bijective et **strictement croissante** alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature.

De plus en cas de convergence : $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du}$

Exemple : Montrer l'égalité : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du$

Soit $u=t^2$, u est C^1, bijective de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante,

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}}$

Soit $f \in C(]a,b[,K)$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une fonction de classe C^1, bijective et **strictement décroissante** alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature.

De plus en cas de convergence : $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du}$

Remarque : les deux versions du théorème de changement de variables donnent : $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))|\varphi'(u)|du}$

Remarque n°2 : L'hypothèse de convergence est indispensable :
Ainsi, le changement de variable u=-t permet d'affirmer que les intégrales $\int_{-\sqrt{2}}^{0}\frac{t}{\sqrt{2-t}}dt$ et $\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{t}{\sqrt{2-t}}dt$ sont de même nature, et comme elles sont convergentes alors $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{t}{\sqrt{2-t}}dt\ = \int_{-\sqrt{2}}^{0}\frac{t}{\sqrt{2-t}}dt + \int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{t}{\sqrt{2-t}}dt$

Alors que : $\int_0^{+\infty} tdt$ et $\int_{-\infty}^{0} tdt$ sont de même nature mais on ne peut pas écrire que : $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt = \int_0^{+\infty} tdt + \int_{-\infty}^{0} tdt$ (du fait de leurs divergences !)

Exemple : Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$ et calculer sa valeur.
<u>Première méthode : sans l'intégrabilité</u>
Soit x>0, I(x)= $\int_0^{+x}\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$, soit u=$\frac{1}{t}$, u est C^1 sur]0,+∞[, bijective de]0,+∞[sur]0,+∞[
D'où I(x) = -$\int_0^{+x}\frac{\ln(u)}{(1+u)^2}du$ = -I(x) d'où I(x) = 0 et I=0 donc I convergente.

<u>Deuxième méthode : avec intégrabilité</u>
On a : t→ $\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ continue sur]0,+ ∞[
En 0 :
On a : $\sqrt{t}\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\to 0$ donc : $\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$ intégrable en 0 par comparaison avec une intégrale de Riemann
En +∞ :
On a : $t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\to 0$ donc : $\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} = o(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}})$ intégrable en ∞ par comparaison avec une intégrale de Riemann

Donc : t→ $\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ intégrable sur]0,+ ∞[, donc $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$ converge.

Et pour sa valeur, on reprend les calculs de la première méthode…

VI. Intégrales semi-convergentes

1) Définition

Si une fonction f$\in \mathcal{CM}$(I,$\mathbb{C}$) n'est pas intégrable mais si $\int_I f$ converge alors on dit que $\int_I f$ est semi-convergente.

2) Etat des lieux :

L'étude des intégrales semi-convergentes ne peut se faire entièrement avec les théorèmes de comparaison puisque ceux-ci se fondent sur des intégrales absolument intégrales.
Le changement de variable ne fera en général pas apparaître des fonctions intégrables.
L'outil principal est l'intégration par parties.

Exemple : Soit $\alpha \in]0,1]$, étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}$dt

On pose : u=$\frac{1}{t^\alpha}$ et v=$\frac{e^{it}}{i}$, clairement u et v sont C^1 sur $[1,+\infty[$
Soit x>0
On a I(x) $= \int_1^{+x} \frac{e^{it}}{t^\alpha}$dt $=[\frac{e^{it}}{it^\alpha}]_1^x + \frac{\alpha}{i}\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$dt or $\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}$dt converge !

Mais est-elle absolument convergente ?