Calcul différentiel (1)

I. Topologie

1) Définition « norme »

On appelle norme sur un K-espace vectoriel E, une application N :E→ $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

Pour tout x de E, N(x) = 0⟺x=0
Pour tout λ de K, et x de E, N(λx) = $|\lambda|$N(x)
Pour tout (x,y)∈E², N(x+y)≤N(x)+N(y)

Exemple : Montrer que N : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, u(x,y) →N(u) = max($|x|$, $|y|$) définit une norme sur $\mathbb{R}^2$

Remarque : Si E est un espace vectoriel muni d'une norme, alors on qualifie E d'espace vectoriel normé (en abrégé : E.V.N.)

2) Applications de la notion de norme :

a) On peut définir une distance associée d :
Ainsi d :E²→ $\mathbb{R}^+$, (x,y) →d(x,y)=N(x-y)

b) On peut définir une boule fermée : $B_f(a,r) = \{x \in E, N(a-x) \leq r\}$

On peut définir une boule ouverte : $B(a,r) = \{x \in E, N(a-x) < r\}$

On peut définir une sphère: $S(a,r) = \{x \in E, N(a-x) = r\}$

3) Distance d'un point à une partie

On appelle distance d'un point x de E à une partie A, non vide, de E le réel D(x,A) = inf{N(x-y), y∈A) (*Au fait…Pourquoi cette définition est légitime ?)*

4) Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si les fonctions : $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont majorées sur E\{0}

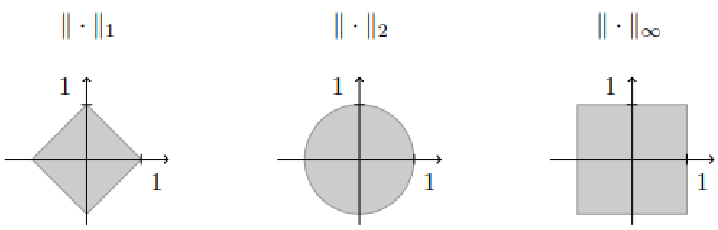
5) Quelques normes sur K^n

Pour $x=(x_1,\dots,x_n) \in K^n$

On définit : $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ et $N_\infty(x) = sup_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|$

Exercice : Vérifier que l'on définit bien ainsi des normes !

Quelques exemples de boules unité :



6) Voisinage
   On appelle voisinage d'un point a de E toute partie X de E contenant une boule ouverte de centre a. Ainsi : **X∈V(a)**$\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{r} > \mathbf{0}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{X}$

7) Ouverts/fermés
   On appelle ouvert de E toute partie X de E qui est voisinage de chacun de ses points :
   X ouvert de E$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \exists \boldsymbol{r_x} > \mathbf{0}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r_x}) \subset \boldsymbol{X}$

   On appelle fermé de E toute partie X de E tel que E\X est un ouvert de E.

   Exemples :
   [0,1] est une partie fermée, ℝ est un ouvert, une boule ouverte est un ouvert !
   E et ∅ sont des ouverts.

8) Théorème sur les ouverts
   Si D_1 et D_2 désignent deux ouverts d'un E.V.N. E alors $D_1 \cap D_2$ et $D_1 \cup D_2$ sont des ouverts de E. (résultats identiques si D_1 et D_2 sont des parties fermées)

9) Théorème (admis)
   Soit E un espace vectoriel sur ℝ ou ℂ de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes. C'est donc en particulier le cas sur $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$.

II. <u>Limite</u>

Les définitions seront données ici à l'aide de la norme infinie, mais s'adaptent avec n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1) Limite
   Soit x_0 un point de $\mathbb{R}^2$ $ou\ de$ $\mathbb{R}^3$, et E un voisinage de ce point.
   On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 admet pour limite le nombre réel L lorsque x tend vers x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre $\eta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $\|x - x_0\|_\infty \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.
   Ainsi: $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{\eta} > \mathbf{0}, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|_\infty \leq \boldsymbol{\eta} \Longrightarrow |\mathbf{f(x)-L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$. On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

   On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 si et seulement si :
   $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, \exists \boldsymbol{\eta} > \mathbf{0}, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|_\infty \leq \boldsymbol{\eta} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \geq \boldsymbol{A}$

   Remarques :
   La notion de limite **ici** ne dépend pas des normes utilisées.
   La limite, si elle existe, est unique.

   Démonstration :
   Si f admet L et L' comme limites alors L=L'
   (En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $|L-L'| = |L-f(x)+f(x)-L'| < |f(x)-L|+|f(x)-L'| < \varepsilon$, en faisant tendre ε vers 0…)

   Remarque : Nous pouvons généraliser ces définitions aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ à l'aide de normes sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$

2) Proposition

Une fonction f : $E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ou de* $E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 admet une limite L lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)n\in\mathbb{N}$ d'éléments de $\{x \in E, x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(x_n))n\in\mathbb{N}$ converge vers L

3) Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions de f : $E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ou de* $E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 admettant respectivement pour limites L_1 et L_2 lorsque x tend vers x_0

Pour tout couple de nombres réels α et β, la limite de la fonction $\alpha f + \beta g$ lorsque $x \to x_0$ existe et est égale à $\alpha L_1 + \beta L_2$.

La limite de la fonction fg quand $x \to x_0$ existe et elle est égale à L_1L_2.

La limite de de f/g si $L_2 \neq 0$ lorsque $x \to x_0$ existe et est égale à L_1/L_2.

4) Permutation de limites

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ existe

et $y \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe. Alors: $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = L$

Démonstration : Revenir à la définition de $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ *et utiliser…l'unicité de la limite.*

III. <u>Fonctions continues</u>

1) Définition

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ (mais la définition se généralise sans peine à $\mathbb{R}^n$)

Soit p∈U, on dit que f est continue en p si :

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{\eta} > \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{U}, \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{p}\| \leq \boldsymbol{\eta} \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$$

On dit que f est *continue sur U* si elle est *continue en tout point de U.*

Exemple : Montrer que la fonction f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x,y) →*x-2y* est continue.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0, \forall z \in U, \|z - p\| \leq \eta \Rightarrow |f(z) - f(p)| \leq \varepsilon$

Si z(x',y') et p(x,y) alors $|f(z) - f(p)| = |x' - 2y' - x + 2y| \leq |x - x'| + 2|y - y'| \leq 2|x - x'| + 2|y - y'| \leq 2(|x - x'| + |y - y'|)$

Or $\|z - p\| \leq \eta \Leftrightarrow |x - x'| \leq \eta$ et $|y - y'| \leq \eta$

En prenant $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, on a $2(|x - x'| + |y - y'|) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire : $|f(z) - f(p)| \leq \varepsilon$

2) Remarque

Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que f admette f(a) comme limite en a…

3) Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$
Soit f : X→ ℝ
Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de X convergeant vers a, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

Démonstration : voir II.2)

4) Opérations algébriques
Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Soient f et g : X→ ℝ
Si f est continue sur X alors |f| est continue sur X
Si f et g sont continues sur X alors f+g continue sur X
Si f est continue sur X alors $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est continue sur X
Si f et g sont continues sur X alors fg est continue sur X
Si f et g sont continues sur X et si g ne s'annule pas sur X alors $\frac{f}{g}$ est continue sur X

5) Un exemple de fonctions classiques continues…
Une fonction polynomiale en 3 variables x, y ,z est une combinaison linéaire de fonctions de la forme : $x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}$, m_1, m_2, m_3 *entiers naturels* (on généralise sans peine à une fonction polynomiale à p variables)

Toute fonction f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^3$
Ainsi : g : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x,y) →$x^2$-$y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale

6) Composée de fonctions continues
Soit X et Y deux parties $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$
Soit f: X→ ℝ, et Soit g : Y→ ℝ avec f(X)⊂Y
Si f est continue sur X et si g est continue sur Y, alors gof est continue sur X

Démonstration :
Si f est continue en p$\in U$*, alors :* $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in U, \|z-p\| \leq \eta \Rightarrow |f(z)-f(p)| \leq \varepsilon$
Si g est continue en f(p), alors : $\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0, \forall z' \in I, \|z'-f(p)\| \leq \eta' \Rightarrow |g(z')-gof(p)| \leq \varepsilon'$
Soit $\varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0, \|f(z)-f(p)\| \leq \eta' \Rightarrow |gof(z)-gof(p)| \leq \varepsilon'$
Pour $\varepsilon = \eta'$*, on a :* $, \exists \eta > 0, \forall z \in U, \|z-p\| \leq \eta \Rightarrow |f(z)-f(p)| \leq \eta'$
Et donc, on a bien :
$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0, \|f(z)-f(p)\| \leq \eta' \Rightarrow |gof(z)-gof(p)| \leq \varepsilon'$

Exercice : Montrer que U={(x,y)∈ $\mathbb{R}^2, x > 0$} est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

<u>Première méthode</u> : Directement avec la définition

<u>Deuxième méthode</u> : Image réciproque
a) Démontrer que si f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, et si A est un ouvert de ℝ, alors $f^{-1}(A)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
b) En déduire alors que U est un ouvert.

7) Continuité partielle

a) définition

Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$ *et* f: X→ $\mathbb{R}$
Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, l'application f(.,β), x→f(x, β) définie sur l'ensemble des réels x tels que (x, β) ∈X
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application f(α.,), x→f(α, x) définie sur l'ensemble des réels x tels que (α, x) ∈X
Ces applications sont appelées applications ou fonctions partielles.

Remarque : Ces définitions s'adaptent sans difficultés à une partie X de $\mathbb{R}^3$

b) Continuité

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$
Soit f : I×J→ $\mathbb{R}$
Soit a(α, β) ∈ I×J
Si f est continue en a alors les fonctions partielles f(.,$\boldsymbol{\beta}$) et f($\boldsymbol{\alpha}$.,) sont continues respectivement en $\boldsymbol{\alpha}$ et en $\boldsymbol{\beta}$

Démonstration :
On a : f(.,β) composée de I→ I×J→ $\mathbb{R}$, x→ (x, β) →f(x, β), toutes les deux continues.

Remarque : Le résultat se généralise à $\mathbb{R}^3$

c) Proposition : **La réciproque de la propriété précédente est fausse**
Soit f : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, (x,y) → $\frac{xy}{x^2+y^2}$,
Les applications partielles admettent 0 comme limite en 0

Pourtant f(x,x) =$\frac{1}{2}$ donc $\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0$
Remarque : Cette technique consistant à prendre un chemin particulier ici (x,x), c'est-à-dire la première bissectrice, est pratique pour démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

d) Etude d'un exemple :

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) de f(x,y) = $\frac{x^2y^2}{x^4+y^6}$ et g(x,y) = $\frac{x^3y^2}{x^4+y^6}$

<u>Pour f :</u> Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
On a f(x,0) = 0 donc $\lim_{x\to 0} f(x,0)$=0
Or f(x,x) = $\frac{1}{1+x^2} \to 1$ *lorsque* $x \to 0$ Donc f n'a pas de limite en (0,0)

<u>Pour g :</u> Il est clair que g est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
On a $\lim_{x\to 0} g(x,0)$=$\lim_{x\to 0} g(0,x)$=0
Donc si cette limite existe, elle est nulle.
On passe en coordonnées polaires : x=ρcos (θ) et y= ρsin (θ)
On a : 0≤ $|g(x,y)| \leq \rho^{\frac{1}{6}} \to 0$. Ainsi g a pour limite 0 en (0,0)

IV. Fonctions de classe C^1

U désigne ici un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et f une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$

1) Dérivées partielles

Soit p= (a,b) ∈U

Soit D_1={x∈ $\mathbb{R}$, (x,b) ∈U} et D_2={y∈ $\mathbb{R}$, (a,y) ∈U}

On définit les applications partielles :$\varphi_1: D_1 \to \mathbb{R}, x \to f(x,b)$

Et $\varphi_2: D_2 \to \mathbb{R}, y \to f(a,y)$

Soit p= (a,b) ∈U

Si l'application $\boldsymbol{\varphi_1}$ est dérivable en a, alors on dit que f admet une première dérivée partielle en (a,b) et on pose : $\boldsymbol{\partial_1}$f(a,b) = $\boldsymbol{\varphi_1}'(\boldsymbol{a})$

Si l'application $\boldsymbol{\varphi_2}$ est dérivable en b, alors on dit que f admet une deuxième dérivée partielle en (a,b) et on pose : $\boldsymbol{\partial_2}$f(a,b) = $\boldsymbol{\varphi_2}'(\boldsymbol{b})$

En pratique, on utilise plutôt : $\boldsymbol{\partial_1}$f(a,b) = $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}$ et $\boldsymbol{\partial_2}$f(a,b) = $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$

Attention, on verra très souvent ce genre d'écriture : $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)}$

La variable x au dénominateur signifie qu'on dérive f selon la première variable (c'est une variable liée) tandis que le x de (x,y,z) désigne une coordonnée d'un point libre (c'est une variable libre). Ces notations sont donc bien différentes !

Exemples :

Soit (α,β,γ)∈ $\mathbb{R}^3$ et la fonction f définie par : f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \to \ \alpha x + \beta y + \gamma yz$

Déterminer les dérivées partielles de f.

On a facilement : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \alpha$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \beta + \gamma z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \gamma y$

Soit H={(x,y)∈ $\mathbb{R}^2, x > 0$} et f : H→ $\mathbb{R}$, $(x,y) \to x^y$

Déterminer les dérivées partielles de f.

On peut écrire : f(x,y) = $e^{y\ln x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ = yx^{y-1} et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ =ln(x)x^y

2) Proposition

Soient f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$, et p∈U

Si f et g admettent des dérivées partielles en p(a,b), alors f+g aussi

De plus : $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)$

Et, $\boldsymbol{\frac{\partial(f+g)}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$

Si f et g admettent des dérivées partielles en p, alors fg aussi

De plus : $\frac{\partial(fg)}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)g(a,b)$+f(p) $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)$

Et, $\boldsymbol{\frac{\partial(fg)}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)g(a,b)}$**+f(a,b)** $\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$

De même pour le quotient si le dénominateur ne s'annule pas :

Et $\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ =($\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$-f(a,b) $\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$)/$g^2$(a,b)

Attention : L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité de la fonction.

Exemple : Soit la fonction f définie par : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$

Montrer que, pourtant, f est discontinue en (0,0)

On a :Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ et

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(x,y)$=$\frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

Et pour $(x,y) = (0,0)$?

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$

De même : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(0,0)$ =0

En passant par les coordonnées polaires : f(rcosθ, rsinθ) $= \frac{\mathrm{rcos}\theta\mathrm{rsin}\theta}{r^2} = \mathrm{cos}\theta\mathrm{sin}\theta$ qui ne tend pas toujours vers 0, selon les valeurs de θ

3) Fonctions de classe C^1

Une fonction f définie sur un ouvert U est dite de classe C^1 si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues. On note C^1 (U, $\mathbb{R}$) leur ensemble.

Exemple important : les polynômes à p variables sont C^1 sur $\mathbb{R}^p$

4) Développement limité à l'ordre 1 (théorème admis)

Soit f $\in C^1$ (U, $\mathbb{R}$) et p=(a,b) $\in$U

Il existe une fonction $\varepsilon: U \to \mathbb{R}$ telle que ε(z)$\to_{z\to p}$ 0

Et : $\forall (x,y) \in U$:

f(x,y) = f(a,b) + (x-a) $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$+ (y-b) $\frac{\partial f}{\partial y}$(a,b)+ $\boldsymbol{\varepsilon}$*(x,y)*$\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|$

5) Proposition

Si f$\in C^1$ (U, $\mathbb{R}$), alors f est continue sur U

Démonstration : évidente à l'aide du DL à l'ordre 1 !

Remarque : Comme en dimension 1, la réciproque de cette proposition est fausse
Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to |x|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas C^1 puisqu'elle n'admet pas de dérivée partielle en (0,0) par rapport à la première variable…

6) Proposition

Si (f,g)$\in C^1$ (U, $\mathbb{R})^2$, f+g et fg sont des fonctions de classe C^1 sur U.

7) Gradient

a) Définition

Si U désigne un **ouvert de** $\mathbb{R}^2$

Soit f∈ C^1 (U, ℝ), le gradient de f est l'application ∇f vérifiant : U→ $\mathbb{R}^2$,
(a,b) → $\nabla f(\mathbf{a},\mathbf{b})$, avec $\nabla f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$

Si U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$

$\nabla f(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c))$

b) Remarques

Géométriquement, $\nabla f(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur du plan dont les coordonnées sont $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Le gradient est un champ de vecteurs, c'est-à-dire une application dont les valeurs sont des vecteurs.

Réécriture du développement limité à l'ordre 1 :

Soit f ∈ C^1 (U, ℝ) et p=(a,b) ∈U

Il existe une fonction $\varepsilon: U \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(\mathrm{z}) \to_{z\to p} 0$

Et : $\forall (x,y) \in U$: f(z) = f(p) +$(\nabla f(\mathrm{z}) \big| (z-p)\big) + \varepsilon(z)\|z-p\|$

Exemple : Soit f :$\mathbb{R}^3$ → ℝ, (x,y,z) →xy^2-yz^2

Calculer $\nabla f(1,-2,3)$

8) Différentielle

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Soit f : U→ ℝ de classe C^1 sur U

Pour tout a∈ U, l'application linéaire : $\mathbb{R}^2$ → ℝ, (h,k) →h$\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ + k$\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ est appelée différentielle de f en a, notée df(a)

Remarques :

-On omet souvent d'indiquer le point a, et on obtient la formule : **df = $\frac{\partial f}{\partial x}$dx + $\frac{\partial f}{\partial y}$dy**

(*avec, dx :* $\mathbb{R}^2$ → ℝ*, (h,k)→h et dx :* $\mathbb{R}^2$ → ℝ*, (h,k)→k*)

-La différentielle d'une fonction en un point renseigne sur le comportement local de f. Plus précisément, la différentielle de f en un point M représente la variation infinitésimale de la fonction f en ce point, c'est-à-dire la variation de f lors d'une variation infinitésimale à proximité de M.

Exercice :

1) Déterminer la différentielle de f : (x,y,z)→ $x^2 - y^3 + 2xyz$ en tout point (x_0,y_0,z_0) de $\mathbb{R}^3$
2) Soit f : $\mathbb{R}^2$ → ℝ, u(x,y) → $\|u\|_2^{\,2}$, montrer que la différentielle de f en (x_0,y_0) est : $df(x_0,y_0)=2x_0dx + 2y_0dy$

V. Dérivation des fonctions composées

1) Composition avec une fonction d'une variable

Soit f$\in C^1$ (U, ℝ), I un intervalle contenant f(U) et $\theta \in C^1(I, \mathbb{R})$

Alors : $\theta o f$ est une fonction de classe C^1 avec pour tout p de U :

$\boldsymbol{\frac{\partial \theta o f}{\partial x}}$**(p)** $= \boldsymbol{\theta'(f(p))\frac{\partial f}{\partial x}}$**(p) et,** $\boldsymbol{\frac{\partial \theta o f}{\partial y}}$**(p)** $= \boldsymbol{\theta'(f(p))\frac{\partial f}{\partial y}}$**(p)**

2) Première règle de la chaîne

Soit f$\in C^1$ (U, ℝ) et $(\gamma_1; \gamma_2) \in C^1$ (I, ℝ)^2

On suppose que la fonction : $\gamma: t \rightarrow (\gamma_1(t); \gamma_2(t))$ est à valeurs dans U.

Alors fo$\gamma: t \rightarrow f(\gamma_1(t); \gamma_2(t))$ est de classe C^1 et, pour tout a de I :

On a : **(fo$\boldsymbol{\gamma}$)'(a)** $= \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(a))\, \gamma_1'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(a))\, \gamma_2'(a)}$

Exemple :

Soit h une fonction C^1 sur ℝ²

On procède au changement de variables en coordonnées polaires, soit x=rcos(θ) et y= rsin(θ)

On définit alors la fonction h :(r, θ) →f(rcos(θ), rsin(θ))

Déterminer $\frac{\partial h}{\partial r}$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}$

3) Dérivée selon un vecteur

Soit U ouvert de ℝ², soit f$\in C^1$ (U, ℝ), p∈U, v=(h,k) ∈ ℝ²

L'application $\varphi_v: t \rightarrow f(p+tv)$ est définie au voisinage de 0, dérivable en 0, de dérivée : $\varphi_v'(0)$=h$\frac{\partial f}{\partial x}$(p) + k$\frac{\partial f}{\partial y}$(p) = (∇f(p)|v)

On note D_vf(p) = $\varphi_v'(0)$, cette dérivée est la dérivée de f en p selon le vecteur v

Remarque : Etudier la dérivabilité de f en p selon le vecteur v revient à étudier l'existence de : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t}$

4) Deuxième règle de la chaîne

Soit f$\in C^1$ (U, ℝ), soit V un ouvert non vide de ℝ²

Soit $(\varphi, \psi) \in$ C¹(V, ℝ)² un couple de fonctions tel que

$\Phi: (x,y) \rightarrow (\varphi(x,y), \psi(x,y))$ soit à valeurs dans U.

Alors : foΦ : V→ ℝ, (x,y) →f($\varphi(x,y), \psi(x,y)$) est de classe C^1

De plus : $\boldsymbol{\forall p \in V,} \begin{cases} \boldsymbol{\partial_1(\mathrm{fo}\Phi) = \partial_1 f(\Phi(\mathrm{p}))\partial_1\varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(\mathrm{p}))\partial_1\psi(p)} \\ \boldsymbol{\partial_2(\mathrm{fo}\Phi) = \partial_1 f(\Phi(\mathrm{p}))\partial_2\varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(\mathrm{p}))\partial_2\psi(p)} \end{cases}$

Exemple :

Soit f$\in C^1$ (ℝ², ℝ), on considère F : (u,v) →f(u+uv,u-uv²)

Montrer que F est C^1

Déterminer pour tout (a,b) ∈ ℝ², $\frac{\partial F}{\partial u}(a,b)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(a,b)$

5) Exemple : Etude d'une équation aux dérivées partielles

Trouver toutes les applications f : ℝ² → ℝ de classe C¹ sur ℝ² telles que $\forall (x,y) \in$ ℝ², $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^3 + y$

On primitive par rapport à x : f(x,y) $= \frac{x^4}{4} + xy + C(y)$
Or C(y) = f(0,y) donc C est C^1 sur $\mathbb{R}$
Réciproquement f(x,y) $= \frac{x^4}{4} + xy + C(y)$ convient !

6) Etude d'une équation aux dérivées partielles avec changements de variables :
Soit : f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$ telles que
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+xy$
En utilisant le changement de variable : x=u+v et y=u-v

Avant de traiter l'exercice, on constate un « problème dans le changement de variable », car ce sont les anciennes variables qui s'expriment en fonction des nouvelles, on a facilement : u=$\frac{x+y}{2}$ *et v=*$\frac{x-y}{2}$

On pose φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (u,v) →(u+v,u-v)
On a φ C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et g=fo φ *est* C^1
Et : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u,v))$ - $\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}(\varphi^{-1}(u,v))$
Et : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u,v))$ - $\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}(\varphi^{-1}(u,v))$
D'où : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u,v))$
On résout : $\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u,v)) = x^2+xy$ soit $\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(u,v)) = 2u^2+2uv$…

VI. <u>Dérivées partielles successives :</u>

1) définition
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$
Soit f : U→ $\mathbb{R}$
Soit (i,j)∈$\{1,2\}^2$
On dit que f admet une dérivée partielle seconde en a par rapport aux places i et j successivement si et seulement si : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ existe sur un voisinage de } a \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a) \text{existe} \end{cases}$

Dans ce cas, le réel $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$ est noté $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Remarque : On peut généraliser pour U ouvert de $\mathbb{R}^3$

2) définition :
Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. **On dit que f est de classe C^kpour k entier supérieur ou égal à 1, si f admet des dérivées partielles successives sur U jusqu'à l'ordre k inclus, et que toutes ces dérivées soient continues sur U. Dans le cas où f est de classe C^k pour tout entier k, alors on dit que f est C^∞**

3) Théorème de Schwarz (admis)
Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$
Soit f : U→ $\mathbb{R}$ *et* a∈U **Si f est de classe C² sur U, alors :** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a})$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par f(x,y) $= \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
En passant en polaires, déterminer f(0,0)
Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ (0,0) et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (0,0)
Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$(0,0)=1
Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$(0,0)=-1
Que peut-on conclure ? Cet exemple a été construit par Peano !

VII. Extrema : Le cas de $\mathbb{R}^2$ (Dans tout ce paragraphe, U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$)

1) Définition
Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$, f :X→ $\mathbb{R}$ une fonction et p∈X
On dit que f admet un maximum en p : si $\forall z \in X, f(z) \leq f(p)$

On dit que f admet un maximum local en p : si $\exists \eta > 0, \forall z \in X \cap D(p,\eta), f(z) \leq f(p)$

On définit de même les notions de minimum et de minimum local.

On dit que f admet un extremum en p, si f admet un maximum ou un minimum en p. On définit de la même façon la notion d'extremum local.

Exemple : Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par f(x,y) $=x^2+y^2$, montrer que f admet un minimum en (0,0)

2) Définition
Soit f∈ C^1 (U, $\mathbb{R}$), et p∈U
On dit que p est un point critique pour f si : $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0}$

3) Théorème
Soit f∈ $\boldsymbol{C^1}$ (U, $\mathbb{R}$), et p∈U
Si p admet un extremum local en p, alors p est un point critique de f.

Remarque : Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque de ce théorème est fausse, ainsi, une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum local en chacun de ses points critiques.

Exemple :
Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par f(x,y) $=x^3+y^3$
Vérifier que (0,0) est un point critique de f sans être un extremum local.