

Electrocinétique 3 - Régime sinusoïdal forcé

Jusqu'ici nous avons étudié des régimes permanents, et des régimes transitoires ... qui évoluaient vers des régimes permanents : régime libre, échelon de tension. Que se passe-t-il si maintenant nous soumettons un oscillateur à une excitation sinusoïdale ? On parle ici de **régime sinusoïdal forcé** puisqu'on impose ce régime à partir du générateur.

1. Qu'est-ce qu'un régime sinusoïdal forcé ?

1.1. Analogie mécanique : la balançoire

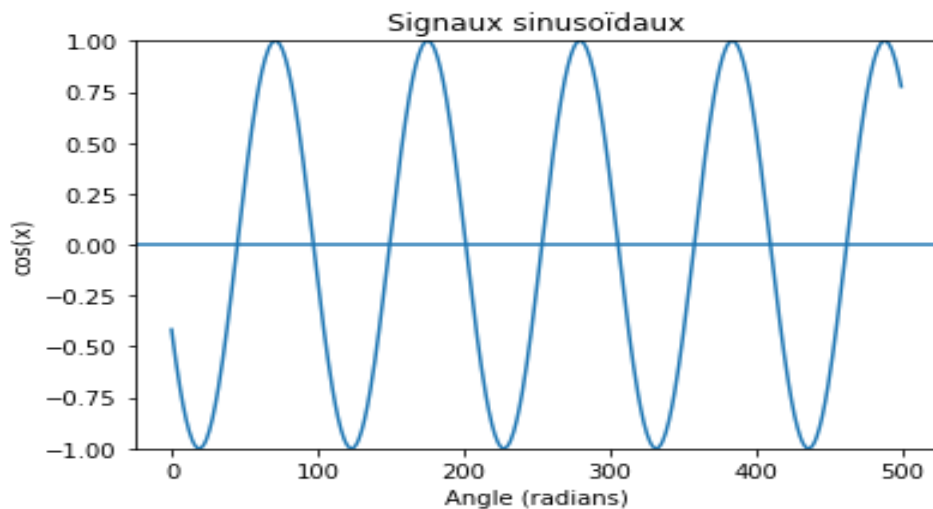
Prenons l'exemple d'une balançoire. Le régime libre de la balançoire correspondrait aux oscillations qui se produisent lorsqu'on écarte la balançoire de sa position d'équilibre et qu'on la relâche : elle finirait par retourner à sa position d'équilibre en raison des phénomènes dissipatifs (les frottements) en oscillant ou non selon le type de régime.

Le régime sinusoïdal forcé pour la balançoire équivaut à placer quelqu'un derrière la balançoire pour la pousser à intervalles réguliers. Nous savons que la balançoire sera sensible à une fréquence particulière (sa fréquence propre) qui va permettre à son mouvement d'atteindre un maximum d'amplitude : c'est ce qu'on appelle le phénomène de résonance, que nous étudierons dans ce chapitre.

1.2. Signaux sinusoïdaux

Nous avons déjà rencontré une représentation mathématique d'un signal sinusoïdal lorsque nous avons étudié l'oscillateur harmonique. Nous avons choisi la représentation mathématique suivante :

$$x(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t$$



Dans le cas des régimes forcés il est plus commode d'utiliser une autre représentation mathématique, tout à fait équivalente à la précédente :

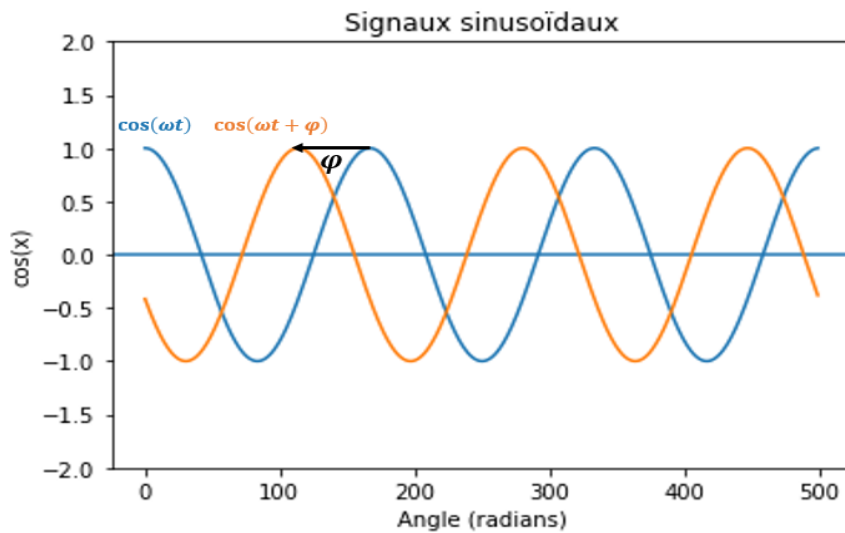
$$x(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

X_0 est l'**amplitude** du signal

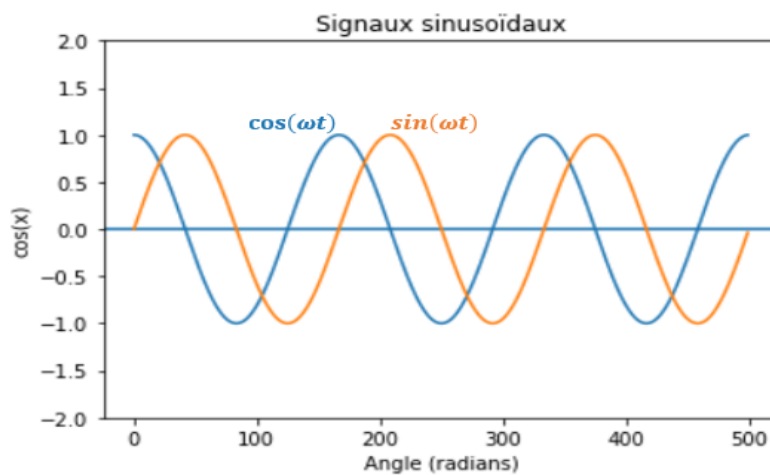
ω est la **pulsation** (en s^{-1})

φ est la **phase** ou **déphasage** (sans unité, généralement exprimé en radian)

Si la fréquence du signal est connue, on remarque qu'il y a toujours deux constantes à déterminer : A et B dans l'expression précédente, X_0 et φ ici.



Un signal est dit en avance de phase sur un autre signal si $\Delta\phi > 0$ et en retard de phase si $\Delta\phi < 0$. Le cas particulier de la fonction sinus est à connaître : un sinus est en retard de phase $\pi/2$ par rapport à un cosinus :



$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

DEFINITION

Un système est en régime sinusoïdal forcé lorsque son entrée $e(t)$ est imposée (« forcée ») et de type sinusoïdal :

$$e(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

2. Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

2.1. Rappels sur les nombres complexes

DEFINITIONS

Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme :

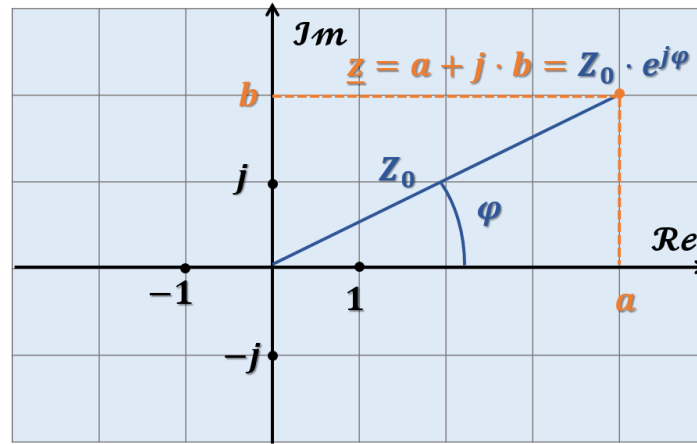
$$\underline{z} = a + j \cdot b$$

j est l'imaginaire pur (on ne le note pas i pour éviter la confusion avec l'intensité) : $j^2 = -1$

a est la **partie réelle** de $\underline{z}$: $a = \mathcal{Re}(\underline{z})$

b est la **partie imaginaire** de $\underline{z}$: $b = \mathcal{Im}(\underline{z})$

Le **plan complexe** permet de représenter graphiquement $\underline{z}$:



Il existe une autre façon d'écrire $\underline{z}$ à partir de la fonction exponentielle (nous ne ferons pas la démonstration mathématique ici) :

$$\underline{z} = Z_0 \cdot e^{j\varphi}$$

Z_0 est appelé module de $\underline{z}$: $Z_0 = |\underline{z}|$

φ est appelé argument de $\underline{z}$: $\varphi = \arg(\underline{z})$

Les significations graphiques, dans le plan complexe de Z_0 et φ sont représentés sur le graphique ci-dessus. A partir de cette représentation, on peut facilement passer d'une notation à l'autre :

$$\begin{cases} |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

Et par ailleurs :

$$\begin{cases} a = Z_0 \cos \varphi \\ b = Z_0 \sin \varphi \end{cases}$$

Soit :

$$\underline{z} = Z_0(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$$

2.2. Grandeur complexe associée à une grandeur réelle sinusoïdale

Nous verrons dans le paragraphe suivant que l'utilisation des nombres complexes se révèle d'une très grande efficacité lorsqu'on travaille en régime sinusoïdal forcé car toutes les équations se retrouvent nettement simplifiées.

Pour illustrer la représentation complexe, prenons un signal sinusoïdal quelconque :

$$x(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

L'idée de la notation complexe est d'associer au signal $x(t)$ une représentation **imaginaire** (comme son nom l'indique elle n'a en elle-même **aucune signification physique**), à partir de laquelle il est possible de facilement retrouver $x(t)$:

$$\underline{x} = X_0[\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi)]$$

Ou encore :

$$\underline{x} = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Il est également fréquent de poser :

$$\underline{x} = \underline{X_0} e^{j\omega t}$$

Avec

$$\underline{X_0} = X_0 e^{j\varphi}$$

Comment fait-on avec cette représentation complexe ?

Dès que l'on dispose d'une représentation complexe d'une grandeur, il est facile de retrouver la vraie grandeur ... la grandeur **réelle** : il suffit de prendre sa partie réelle ! Dans notre exemple, on voit facilement que :

$$x = \operatorname{Re}(\underline{x}) = X_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

On retrouve bien la grandeur de départ. L'intérêt est que certaines grandeurs complexes seront déterminées à partir des équations (différentielles généralement) et que l'on pourra ensuite en déduire les vraies grandeurs.

2.3. Les complexes ... simplifient les équations !

Avec les complexes nous allons voir que les équations différentielles deviennent un jeu d'enfant. En effet, cette représentation permet de transformer les dérivées en produits et les intégrales en divisions ... dès lors, les équations différentielles se résolvent comme de simples équations algébriques.

Equivalent complexe de la dérivation

Pour les différentes opérations, la notation des complexes sous forme d'exponentielle est plus commode. Par exemple, dérivons $\underline{x}$ par rapport à t :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}) = j\omega \cdot X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot \underline{x}$$

En d'autres termes, dériver une grandeur complexe revient à la multiplier par $j\omega$.

Equivalent complexe de l'intégration

$$\int \underline{x} \cdot dt = \int X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \cdot dt = \frac{X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{j\omega} = \frac{\underline{x}}{j\omega}$$

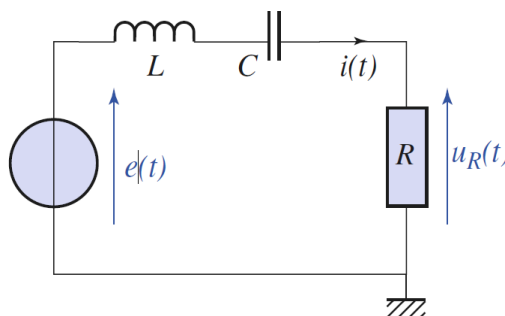
Intégrer une grandeur complexe revient donc à la diviser par $j\omega$.

3. Le circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

3.1. Equation différentielle et résolution en notation complexe

Nous allons illustrer l'intérêt de la représentation complexe sur l'exemple du circuit RLC en régime sinusoïdal forcé. Nous avons déjà vu que, comme la balançoire, un circuit RLC série possède sa pulsation propre (voir chapitre précédent). Mais que se passe-t-il si on lui impose une excitation sinusoïdale ?

Voyons cela avec le circuit suivant :



Le générateur délivre une tension périodique dont on fixe arbitrairement la phase à 0 :

$$e(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Nous allons observer comment réagit le circuit en observant sa réponse en courant, en charge, et en tension aux bornes des différents dipôles. On étudiera d'abord l'intensité du courant $i(t)$. Celui-ci sera cherché sous la forme générale :

$$i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

On note qu'on recherche un signal de même fréquence (et même pulsation donc) que la tension, puisque c'est le générateur qui impose cette fréquence.

Pour ce circuit nous pouvons écrire :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e = E_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Par dérivation nous obtenons :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

En écrivant cette équation sous forme canonique on obtient :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$$

Avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Et :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Pour résoudre cette équation différentielle nous allons utiliser la notation complexe en posant :

$$\underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$$

$$\underline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$-\omega^2 \underline{i} + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \underline{i} + \omega_0^2 \underline{i} = \frac{j\omega}{L} \underline{e}$$

En simplifiant par $e^{j\omega t}$ nous obtenons :

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_0}{Q} \right] \underline{I}_0 = \frac{j\omega}{L} \underline{E}_0$$

On peut enfin écrire :

$$\underline{I}_0 = \frac{\frac{j\omega}{L} \underline{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

Cette expression nous permet de trouver le courant $i(t)$ dans la mesure où on peut déterminer son amplitude I_0 et sa phase φ :

$$I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{\left| \frac{j\omega}{L} \underline{E}_0 \right|}{\left| (\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_0}{Q} \right|} = \frac{\frac{\omega E_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q} \right)^2}}$$

Le calcul de la phase peut se faire en réécrivant l'expression de $\underline{I}_0$ de manière à ce que la partie complexe n'apparaisse qu'au dénominateur, soit en divisant les deux membres par j :

$$\underline{I_0} = \frac{\frac{\omega}{L} E_0}{\frac{\omega \omega_0}{Q} + j \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)}$$

On peut alors dire :

$$\varphi = -\varphi'$$

Avec :

$$\cos \varphi' = \frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

Et

$$\sin \varphi' = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

3.2. Phénomène de résonance en intensité

L'étude précédente a pour but de comprendre comment évoluent les grandeurs du circuit **en fonction de la fréquence imposée** (ou de la pulsation ω , ce qui revient au même) , notamment leur amplitude et leur phase. Dans le cas de la balançoire, nous avons vu qu'il existe un maximum d'amplitude lorsque la fréquence atteint une certaine valeur : c'est ce qu'on appelle le phénomène de **résonance**.

C'est ici une étude de ce type que nous allons réaliser, d'abord en considérant l'intensité du courant puisque nous l'avons complètement déterminée précédemment.

Expression de l'amplitude en fonction de la pulsation réduite

Pour pouvoir étudier de manière simple l'évolution de I_0 on définit la pulsation réduite :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

En remplaçant ω par $x\omega_0$ dans l'expression de I_0 on obtient :

$$I_0 = \frac{\frac{x\omega_0 E_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - x^2\omega_0^2)^2 + \left(\frac{x\omega_0^2}{Q}\right)^2}}$$

Cette expression se simplifie :

$$I_0 = \frac{\frac{QE_0}{L\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{1}{x} - x\right)^2}}$$

On rappelle également que :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

On a finalement :

$$I_0 = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{1}{x} - x\right)^2}}$$

Evolution de I_0 avec x

Etudions la fonction :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2$$

On peut d'emblée remarquer que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = +\infty$$

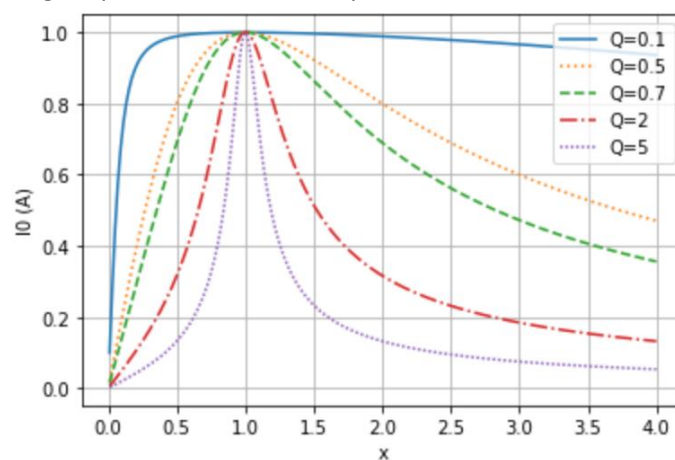
Et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = +\infty$$

Cela signifie que l'amplitude du courant s'annule aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Cette amplitude va donc passer par un maximum, qui correspond au minimum de $f(x)$ soit pour $x = 1$ ou encore $\omega = \omega_0$.

Acuité de la résonance

La résonance est d'autant plus aigüe que le coefficient de qualité est élevé :



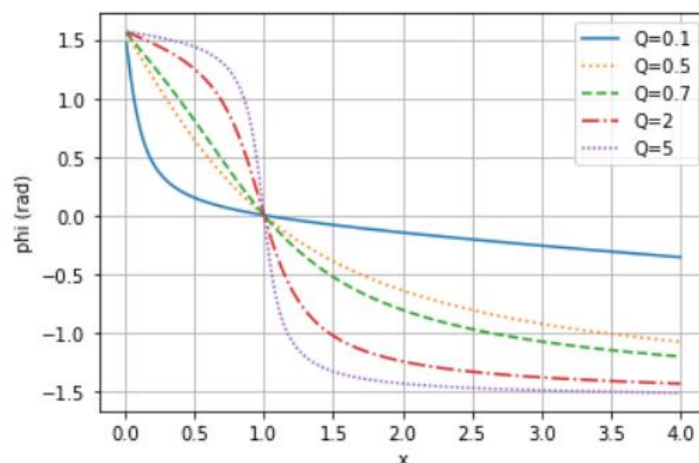
Etude simplifiée de la phase

Il serait fastidieux de faire la même étude avec la phase. Cependant, en reprenant les expressions de $\cos \varphi'$ et $\sin \varphi'$ il est possible d'observer les valeurs limites pour des valeurs particulières de ω : $\omega = 0$; $\omega = \omega_0$ et $\omega = +\infty$.

$$\omega = 0 : \cos \varphi' = 0 \text{ et } \sin \varphi' = -1 \text{ soit } \varphi' = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \omega_0 : \cos \varphi' = 1 \text{ et } \sin \varphi' = 0 \text{ soit } \varphi' = 0 \text{ et } \varphi = 0$$

$$\omega = +\infty : \cos \varphi' = 0 \text{ et } \sin \varphi' = 1 \text{ soit } \varphi' = \frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$



3.3. Phénomène de résonance en charge

A VOUS DE JOUER

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$, la charge du condensateur.
2. En utilisant la représentation complexe, en déduire l'expression de $\underline{Q}_0$.
3. Ecrire cette expression en fonction de la pulsation réduite.
4. Montrer qu'un phénomène de résonance n'est possible que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et déterminer dans ce cas la pulsation de résonance.
5. Faire une étude du déphasage (étude simplifiée).

4. Circuits linéaires en régime sinusoïdal

4.1. Etude d'un circuit en régime sinusoïdal

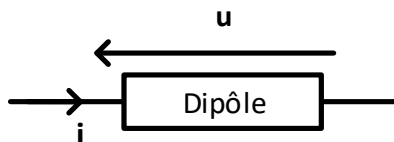
L'intérêt de la notation complexe est également de conserver la même méthode d'étude des circuits que celle vue pour les régimes constants. Dans le cas d'un réseau linéaire en régime harmonique permanent (ou régime sinusoïdal forcé), nous pouvons transposer les lois et modèles développés en régime constant, et utiliser :

- Les lois de Kirchhoff :
 - ✓ la loi des noeuds pour les **intensités complexes** ;
 - ✓ la loi des mailles pour les **tensions complexes** ;
- La décomposition du réseau en dipôles élémentaires :
 - ✓ dipôles passifs caractérisés par leur **impédance complexe** (en convention récepteur) ;
 - ✓ générateurs de tension sinusoïdale de f.e.m complexe , de courant sinusoïdal de c.e.m. d'impédance interne s'ils ne sont pas idéaux.

4.2. Notion d'impédance complexe

Comme en représentation complexe les équations deviennent linéaires, il est possible de caractériser chaque dipôle par un équivalent complexe de la résistance. On parle d'**impédance complexe**.

Soit un dipôle passif représenté en convention récepteur :



En régime sinusoïdal forcé on peut noter comme suit la tension à ses bornes et l'intensité du courant qui le parcourt :

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Les grandeurs complexes associées à u et i sont donc :

$$\underline{u} = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$$

$$\underline{i} = \underline{I}_0 e^{j\omega t}$$

DEFINITION

Pour un dipôle linéaire passif, la tension complexe $\underline{u}$ à ses bornes est reliée à l'intensité complexe $\underline{i}$ qui le traverse par la loi d'Ohm complexe :

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

ou $\underline{Z}$ est un nombre complexe appelé **impédance complexe** du dipôle.

L'argument complexe de $\underline{Z}$ correspond au déphasage entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ car

$$\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{u}) - \arg(\underline{i})$$

Le module de $\underline{Z}$ relie les amplitudes ou les valeurs efficaces (voir plus loin) entre elles : $U_m = |\underline{Z}| \cdot I_m$.

4.3. Impédance complexe des dipôles usuels

Résistor

La tension $u(t)$ aux bornes d'un résistor de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ est :

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

La relation reste donc valable en régime sinusoïdal forcé, et nous en déduisons que l'impédance complexe du résistor vaut :

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R$$

L'impédance d'un conducteur ohmique est donc réelle et constante : c'est sa résistance. La tension et le courant sont en phase.

Condensateur

L'intensité du courant $i(t)$ qui traverse un condensateur de capacité C est liée à la tension $u(t)$ entre ses bornes par la relation :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

En notation complexe nous avons vu que cela se traduisait par une multiplication :

$$\underline{i} = jC\omega \cdot \underline{u}$$

L'impédance complexe d'un condensateur s'écrit

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega}$$

L'impédance d'un condensateur est donc imaginaire pure. L'argument de $\underline{Z}_C$ est $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; la tension est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'intensité.

A RETENIR

Le module de l'impédance est $\frac{1}{C\omega}$; cela signifie qu'elle est d'autant plus petite que la fréquence est élevée. Par contre elle tend vers l'infini quand la fréquence tend vers 0 (régime permanent).

Un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé (fil conducteur) à haute fréquence ; on retrouve qu'il se comporte comme un interrupteur ouvert en régime permanent.

Bobine

La tension aux bornes d'une inductance pure L parcourue par un courant i est :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

En notation complexe on obtient :

$$\underline{u} = jL\omega \cdot \underline{i}$$

L'impédance complexe d'une inductance pure s'écrit

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = jC\omega$$

L'impédance d'une inductance est donc imaginaire pure. L'argument de $\underline{Z}_L$ est $\varphi = +\frac{\pi}{2}$; la tension est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'intensité.

A RETENIR

Le module de l'impédance est $L\omega$; cela signifie qu'elle tend vers l'infini à haute fréquence et qu'elle tend vers 0 en régime permanent.

Une inductance pure se comporte comme un interrupteur ouvert à haute fréquence ; on retrouve qu'il se comporte comme un interrupteur fermé en régime permanent.

4.4. Association d'impédances

Les impédances complexes peuvent s'associer comme le font les résistances en régime permanent :

- L'impédance de deux dipôles placés en série est égale à la somme des impédances
- L'admittance de deux dipôles placés en parallèle est égale à la somme des admittances

5. Puissance en régime sinusoïdal

5.1. Puissance instantanée et puissance moyenne

Avec la notation complexe il faut prendre une précaution très importante : les relations en régime permanent peuvent se transposer en complexe **uniquement si elles sont linéaires**. En particulier, on ne peut pas appliquer les complexes aux produits, comme nous allons le voir avec le calcul de la puissance.

La **puissance instantanée** reçue par un dipôle (en convention récepteur) est la fonction *réelle* du temps :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

En régime sinusoïdal, il est plus pertinent de considérer la **puissance moyenne** reçue par le dipôle. Pour cela, il faut raisonner sur une période :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} p(t) dt$$

Pour faire ce calcul, nous devons impérativement utiliser les grandeurs réelles (pas de multiplication en notation complexe) :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Expression que l'on peut réécrire comme la somme de deux termes :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

Le premier terme est une constante, donc égale à sa valeur moyenne. Le deuxième terme est sinusoïdal, donc de valeur moyenne nulle. On en déduit la puissance moyenne reçue par un dipôle passif :

$$\mathcal{P} = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \cos \varphi$$

Avec $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$: déphasage de la tension par rapport au courant.

$\cos \varphi$ est appelé **facteur de puissance**.

En régime sinusoïdal, cette puissance est appelée **puissance active** et mesurée en watts (W).

5.2. Valeurs efficaces

On peut également écrire :

$$\mathcal{P} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi$$

Où U_{eff} et I_{eff} sont respectivement appelés **tension efficace** et **intensité efficace**. Elles sont données par les relations suivantes :

$$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$$

Et

$$I_{eff} = \sqrt{\langle i^2 \rangle}$$

Où la notation $\langle s \rangle$ désigne la valeur moyenne d'un signal périodique. Soit :

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u^2(t) dt$$

Et :

$$\langle i^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} i^2(t) dt$$

La valeur moyenne de la fonction $\cos^2(\omega t + \varphi)$ valant $\frac{1}{2}$ on a alors :

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Et

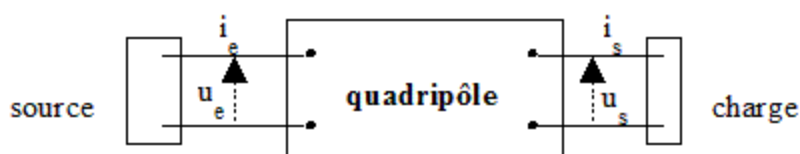
$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

6. Filtrage de signaux périodiques

6.1. Qu'est-ce qu'un filtre ?

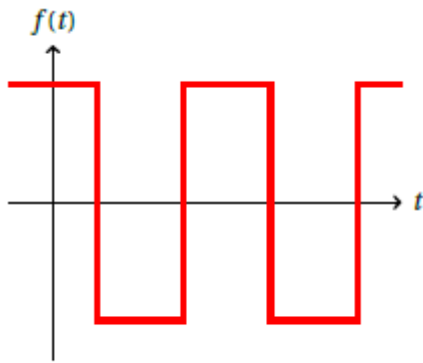
Un filtre est un circuit électronique qui exécute une opération de traitement du signal. C'est à dire, il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres. Un exemple connu du grand public est l'égaliseur audio. Les filtres sont utilisés pour d'innombrables applications pour traiter les signaux (télécommunication, analyse de données, image, son, etc.). Leur rôle est donc essentiel.

Dans ce domaine, des dispositifs particuliers sont utilisés : les quadripôles. Les quadripôles sont utilisés pour réaliser de nombreuses opérations, nous nous limiterons ici au filtrage. Nous étudierons les filtres les plus simples qui consistent en des circuits que nous avons déjà rencontrés : RC, RL ou RLC.

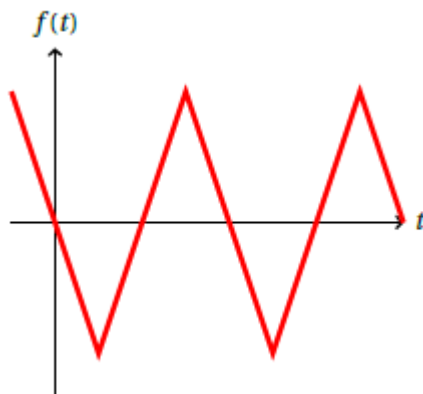


6.2. Signaux périodiques et analyse harmonique

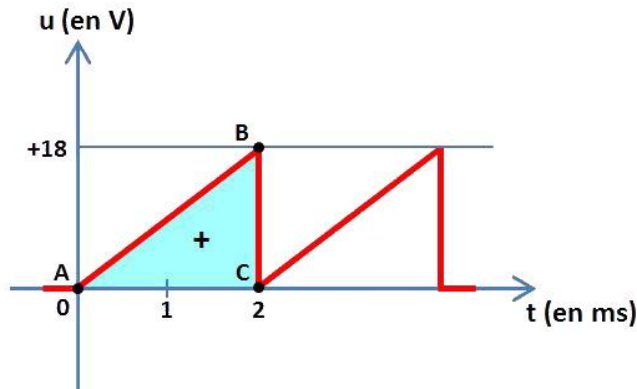
Nous n'avons pour l'instant rencontré qu'un type de signal périodique, le plus pur : le signal sinusoïdal. En réalité, bien d'autres signaux périodiques sont utilisés en électronique dont voici quelques exemples :



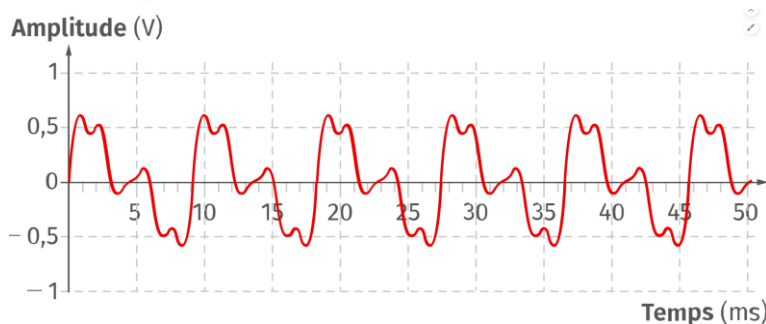
Signal carré



Signal triangulaire



Signal en dents de scie



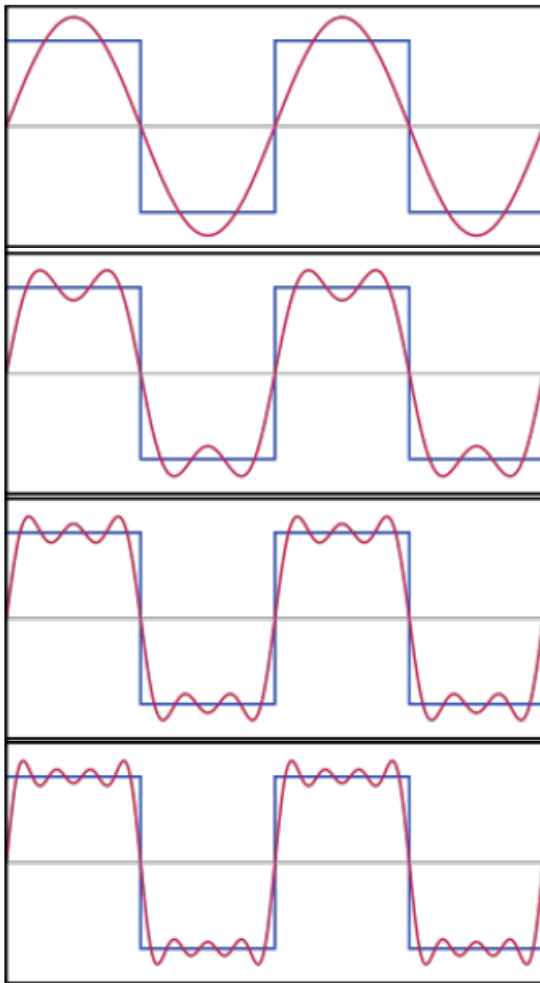
Signal plus complexe
(timbre d'une guitare)

A RETENIR

Tout signal périodique peut se décomposer en une somme infinie de signaux périodiques d'amplitudes différentes, et de pulsations multiples de la pulsation du signal.

Cette opération de décomposition est appelée analyse **harmonique**.

Prenons l'exemple du signal carré d'amplitude E :



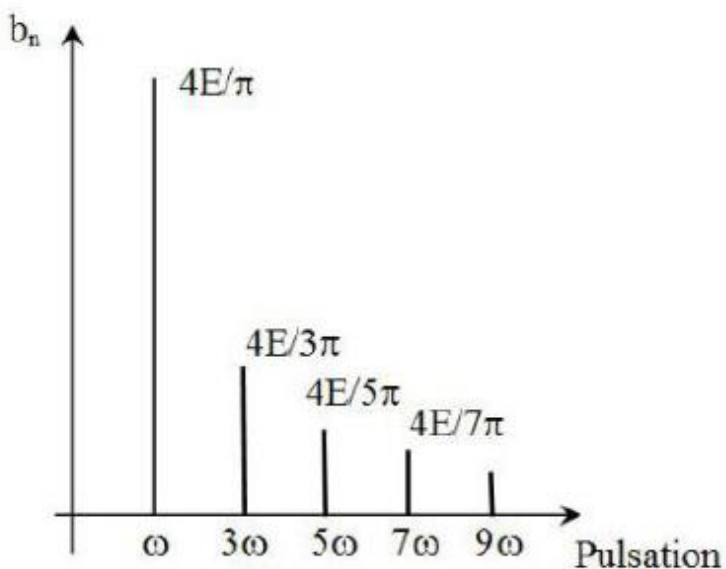
1 sinus de même pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$

1 sinus de pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 3ω ; amplitude $\frac{4E}{3\pi}$

1 sinus de pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 3ω ; amplitude $\frac{4E}{3\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 5ω ; amplitude $\frac{4E}{5\pi}$

1 sinus de pulsation ω ; amplitude $\frac{4E}{\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 3ω ; amplitude $\frac{4E}{3\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 5ω ; amplitude $\frac{4E}{5\pi}$
+ 1 sinus de pulsation 7ω ; amplitude $\frac{4E}{7\pi}$

L'analyse harmonique du signal carré se présente donc comme suit :



REMARQUE

L'opération mathématique qui consiste à réaliser la décomposition d'un signal périodique s'appelle décomposition en série de Fourier. Nous ne développerons pas les équations.

L'analyse spectrale est une opération pratique qui permet de visualiser cette décomposition. Le spectre obtenu est appelé **spectre de Fourier**.

6.3. Principe du filtrage

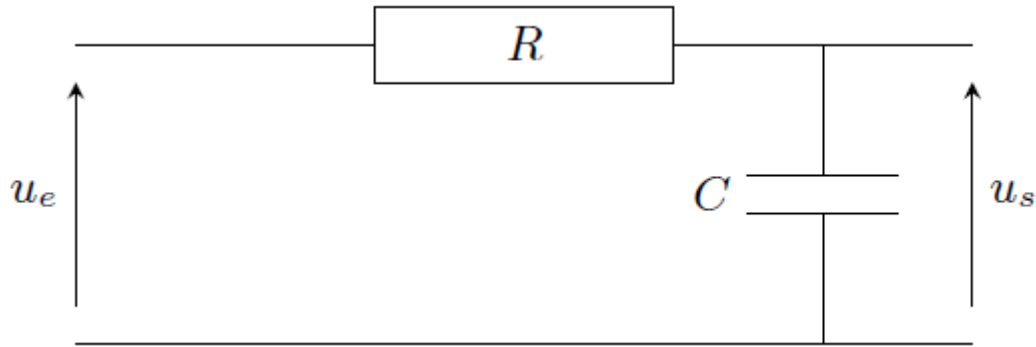
Un filtre adapté permet de sélectionner les composantes du spectre de Fourier qui nous intéressent :

- Supprimer un bruit haute fréquence (grésillement).
- Supprimer les fréquences élevées d'un enregistrement audio peu audible (compression mp3).
- Sélectionner une station de radio en sélectionnant une plage de fréquence précise.

Type de filtre	Effet souhaité	Gabarit du filtre
Filtre passe-bas		
Filtre passe-haut		
Filtre passe-bande		
Filtre coupe-bande		

6.4. Filtre basse-bas

Voici un exemple de quadripôle jouant le rôle de filtre passe-bas :



- A basse fréquence : $\omega \rightarrow 0$, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. On a alors $u_s = u_e$ et aucun courant ne circule dans R .
- A haute fréquence : $\omega \rightarrow +\infty$, le condensateur est équivalent à un fil. On a alors $u_s = 0$.

Fonction de transfert

Nous allons maintenant établir la relation complexe qui lie les grandeurs $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$. En appliquant la relation du diviseur de tension en complexe il vient :

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \cdot \underline{U}_e = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} \cdot \underline{U}_e$$

DEFINITION

On appelle **fonction de transfert** (en régime sinusoïdal forcé) la fonction complexe :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$$

Cette fonction permet de décrire le comportement d'un quadripôle. Elle est caractérisée par :

- Son module, appelé **gain** : $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$
- On utilise souvent le gain en décibel $G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega)$
- Son argument, déphasage entre la tension de sortie et la tension d'entrée : $\varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H})$

Dans le cas du filtre passe-bas étudié ici la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

Avec $\omega_0 = 1/RC$. On peut également utiliser la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$:

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + jx}$$

On peut alors calculer le gain et le déphasage du filtre :

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\varphi(x) = \text{Arg}(\underline{H}) = -\text{Arg}(1 + jx) = -\tan^{-1}(x)$$

REMARQUE

On parle ici de filtre d'ordre 1 car il fait intervenir des termes en ω . Un filtre d'ordre 2 ferait apparaître, dans la fonction de transfert des termes d'ordre 2 (ω^2). Plus l'ordre est élevé plus le filtrage est efficace.

DEFINITION

Le diagramme de Bode consiste à réaliser une étude asymptotique du gain et de la phase afin de déterminer grossièrement le comportement du filtre.

Comportement asymptotique du gain en décibel :

- A basse fréquence $G_{dB} \rightarrow 20 \log(1) = 0$. L'asymptote à basse fréquence est la droite $G_{dB} = 0$.
- A haute fréquence $G_{dB} \rightarrow -20 \log(x)$. L'asymptote à haute fréquence est la droite $G_{dB} = -20 \log(x)$. Cette droite a une pente de -20 dB/décade ; une pente de ± 20 dB/décade est caractéristique d'un filtre du premier ordre.
- $G_{dB}(1) = -3$ dB ; ω_0 est donc la pulsation de coupure à -3dB.

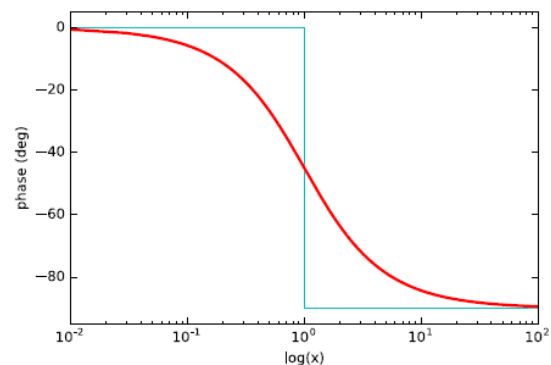
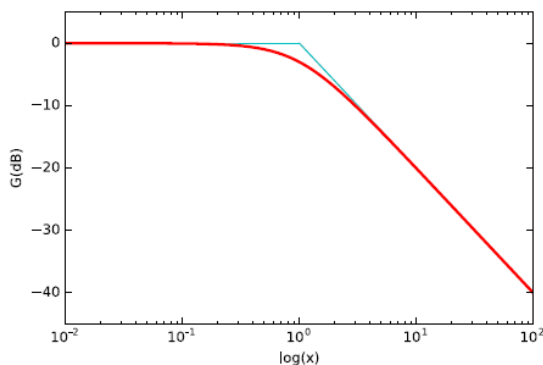
DEFINITION

La **pulsation de coupure** est la (ou les) valeur(s) de la pulsation ω_c pour laquelle $G = G_{max}/\sqrt{2}$ (où G_{max} est la valeur maximale du gain), c'est-à-dire que G_{dB} a perdu 3 décibels par rapport à $G_{dB,max}$.

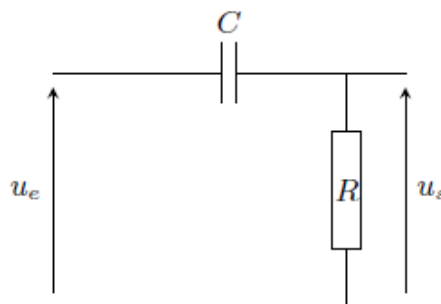
Remarque : il est parfois possible de définir une pulsation de coupure à 6 décibels. Dans ce cas $G = G_{max}/2$.

Comportement asymptotique de la phase :

- A basse fréquence $\varphi \rightarrow 0^-$. La phase tend vers 0 à basse fréquence par valeur négative.
- A haute fréquence $\tan \varphi \rightarrow -\infty$ soit $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.
- $\varphi(1) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$



6.5. Filtre passe-haut



- A basse fréquence : $\omega \rightarrow 0$, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. On a alors $u_s = 0$ car aucun courant ne circule dans R.
- A haute fréquence : $\omega \rightarrow +\infty$, le condensateur est équivalent à un fil. On a alors $u_s = u_e$.

A VOUS DE JOUER

1. Déterminer la fonction de transfert de ce filtre, d'abord en pulsation puis en pulsation réduite.
2. Calculer le gain et la phase en pulsation réduite.
3. Tracer le diagramme de Bode pour le gain et la phase.
4. Déterminer la pulsation de coupure à 3 dB.

