DS reduction

jeudi 16 octobre 2025 08:02

Exercice

1) $rg A = 2$ donc $\dim \ker A = n-2$

Ainsi, $\exists x \neq 0_E$ tel que $Ax = 0_E$

c'est-à-dire, $\exists x \neq 0_E \,/\, Ax = 0x$

Donc $\boxed{0 \in Sp(A)}$

Rq : On peut dire aussi que $\dim \ker A = 1$

Donc A non inversible

Donc $0 \in Sp(A)$

2) $A - I_n$ non inversible donc $\exists x \neq 0_E$ tq $(A - I_n)(x) = 0_E$

Donc $\exists x \neq 0_E$ tq $Ax = x$.

Ainsi $1 \in Sp(A)$

Par le th. du rang, on sait que $\dim \ker A = n-2$.

Donc $\dim E_0(A) = n-2$

De plus $\dim E_1(A) \geq 1$.

D'autre part, $tr(A) = 0$ donc il existe au moins une valeur propre, qui additionnée à 1 donnera 0.

or $\dim E_1(A) + \dim E_0(A) \geq n-1$, il ne peut donc y en avoir qu'une seule à savoir -1.

$$\left.\begin{aligned} \text{Ainsi } \dim E_0(A) &= n-2 \\ \dim E_1(A) &= 1 \\ \dim E_{-1}(A) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ et } Sp(A) : \{-1; 0; 1\}$$

On a toujours : $E_0(A) \oplus E_1(A) \oplus E_{-1}(A)$

or $\dim(E_0(A) \oplus E_1(A) \oplus E_{-1}(A)) = n = \dim E$

Donc $E = E_0(A) \oplus E_1(A) \oplus E_{-1}(A)$

ccl : $\boxed{A \text{ diagonalisable}}$

Problème

1) $$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ -1 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)(x+1)$$

$\boxed{Sp(A) = \{3, 1; -1\}}$

2) $\boxed{\text{A est diagonalisable car elle possède 3 valeurs propres distinctes en dim 3.}}$

3) Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} X_n$

$X_{n+1} = AX_n$ or $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X_{n+1} = PDP^{-1}X_n$

$P^{-1}X_{n+1} = DP^{-1}X_n$, on pose $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

On a : $Y_{n+1} = DY_n \iff \begin{cases} \alpha_{n+1} = 3\alpha_n \\ \beta_{n+1} = \beta_n \\ \gamma_{n+1} = -\gamma_n \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 3^n \\ \beta_n = \beta_0 \\ \gamma_n = (-1)^n \gamma_0 \end{cases}$

$X_n = PY_n$, il reste à déterminer P.

$E_3(A)$:

$$\begin{cases} x + 2y = 3x \\ 3y = 3y \\ x + 4y - z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2y \\ 5y = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = \frac{4}{5}z \end{cases}$$

$\boxed{E_3(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)}$

- $E_1(A)$

$$\begin{cases} x + 2y = x \\ 3y = y \\ x + 4y - z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ x = 2z \end{cases}$$

$\boxed{E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- $E_{-1}(A)$

$$\begin{cases} x + 2y = -x \\ 3y = -y \\ x + 4y - z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff z \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{E_{-1}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 3^n \\ \beta_0 \\ \gamma_0 (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_0 3^n + 2\beta_0 \\ 4\alpha_0 3^n \\ 5\alpha_0 3^n + \beta_0 + \gamma_0(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_n = 4\alpha_0 3^n + 2\beta_0 \\ v_n = 4\alpha_0 3^n \\ w_n = 5\alpha_0 3^n + \beta_0 + \gamma_0(-1)^n \end{cases}$$

or $u_0 = v_0 = w_0 = 1$.

$$\begin{cases} 4\alpha_0 + 2\beta_0 = 1 \\ 4\alpha_0 = 1 \\ 5\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{4} \\ \beta_0 = 0 \\ \gamma_0 = 1 - \frac{5}{4} = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_n &= 3^n \\ v_n &= 3^n \\ w_n &= \frac{5}{4} \times 3^n - \frac{1}{4} \times (-1)^n \end{aligned}}$$