Chapitre 3 : **« Compléments sur séries numériques »**

I. Rappels de première année

1) Définition

Etant donné une suite $(u_n) \in \varkappa^n$, de nombres réels ou complexes, on associe la suite $(Sn)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

La suite $(Sn)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général u_n. On la note simplement $\sum u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}, S_n$ est appelée somme partielle d'indice n de $\sum u_n$

Remarque : il est très facile de retrouver u_n à partir de S_n en effet, $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ si $n \geq 1$

2) Convergence

a) Définition

Soit $(u_n) \in \varkappa^n$, la série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite des sommes partielles (S_n) l'est.

Dans ce cas, la somme de la série est la limite des sommes partielles.

On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

Exemple :

Soit u la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0=1$ alors $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-1}{2} = \infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

b) Théorème dit de condition nécessaire de convergence

Soit $\sum u_n$ une série numérique, si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Si la suite (u_n) n'est pas convergente de limite nulle alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Attention, la convergence du terme générale vers 0 ne suffit pas à établir la convergence de la série.

c) Théorème comparaison suite-série

Soit (a_n) et (u_n) deux suites numériques telles que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_{n+1} - a_n$

Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0$

3) Reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente, le reste d'indice n de $\sum u_n$ est définie par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$, de plus, la suite (R_n) est convergente de limite nulle.

4) Comparaison
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $0 \leq u_n \leq v_n$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

Démonstration : Il suffit de revenir aux sommes partielles…

Exemple : Comme : $0 \leq \frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, comme la série géométrique de terme général $\frac{1}{2^n}$, converge, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{1+2^n}$ converge également.

5) Règle dite des équivalents.
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Démonstration :
Si $u_n \sim v_n$ alors *il existe* un rang n_0 à partir duquel, $0 \leq \frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n$, et on revient aux sommes partielles.

Exemple : Comme $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, et que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

6) Règle dite des comparaisons
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs

Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge

Si $\sum v_n$ converge et $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge

7) Comparaison série-intégrale (1)
Soit f : $[0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive, alors : $\forall k \geq 1$, $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$

Et par sommation : $f(0) + \int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt$

8) Séries de référence
Séries géométriques
Soit $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$
Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Séries de Riemann
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

9) Règle de Riemann

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs, soit $\alpha \in]0;+\infty[$

Il suffit qu'il existe α>1 tel que $\lim_{k\to+\infty} k^\alpha u_k = 0$ pour que $\sum u_k$ converge.

Il suffit qu'il existe $\alpha \leq$1 tel que $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha u_k} = 0$ pour que $\sum u_k$ diverge.

Exercice :

Soit $\sum u_k$ avec $u_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, déterminer la convergence de la série par :

-comparaison avec une série de Riemann

-par application de la règle de Riemann

-Un élève écrit : $\frac{k}{(k+1)(k+2)} \to 0$, $donc\ \frac{1}{(k+1)(k+2)} = o\left(\frac{1}{k}\right)$ *et la série diverge*. Que peut-on en penser ?

10) Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs, on suppose que la suite $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ converge et on appelle L sa limite.

Alors, si L>1, $\sum u_k$ diverge

Alors, si L<1, $\sum u_k$ converge

Alors, si L =1, on ne peut pas conclure avec le critère de d'Alembert.

Exercice :

Démontrer que pour tout x>0, $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge. Il s'agit de l'exponentielle.

II. <u>Absolue convergence</u>

1) Définition

Une série $\sum u_k$ est absolument convergente s'il existe $\sum v_k$ à termes réels positifs convergente telle que $u_k = o(v_k)$ ou $u_k = O(v_k)$ quand k tend vers $+\infty$

2) Comparaison d'une série complexe à une intégrale (2)

Soit f une fonction de classe C^1 sur [a,+∞[à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que f ' soit intégrable sur [a,+∞[.

Alors la série de terme général : $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt$-f(n) est absolument convergente.

Remarques :

-On peut comparer les hypothèses de ce théorème de comparaison avec celles du théorème précédent (une fonction continue par morceaux, décroissante et positive)

-Si la série de terme général w_n converge, alors on récupère que les séries de termes généraux respectifs $\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ et f(n) sont de même nature (convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux)

Démonstration :

A partir de n_0>a, on a par IPP : $\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ = nf(n)-(n-1)f(n-1)- $\int_{n-1}^{n} tf'(t)dt$

Donc w_n = (n-1)(f(n)-f(n-1))- $\int_{n-1}^{n} tf'(t)dt = \int_{n-1}^{n}(n-1-t)f'(t)dt$
On en déduit que : $|w_n| \leq \int_{n-1}^{n}|f'(t)|dt$, or f ' est intégrable
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n}|f'(t)|dt$ existe donc la série de terme général $\int_{n-1}^{n}|f'(t)|dt$ converge et la série de $|w_n|$ converge par majoration.

3) Exemple :
Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\sin(\ln(n))}{n}\ pour\ n \geq 1$ diverge.
Ind : on montrera que la série des u_n est de même nature que la série de terme général $\int_{n-1}^{n}\frac{\sin(\ln(t))}{t}dt$

Soit f :t→ $\frac{\sin(\ln(t))}{t}$ sur]1 ;+∞[, on a f C^1 et f '(t) = $\frac{\cos(\ln(t))-\sin(\ln(t))}{t^2}$
Comme |f '(t)|≤ $\frac{2}{t^2}$, on a f ' intégrable sur]1 ;+∞[,
Ainsi $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ avec $v_n = \int_{n-1}^{n}\frac{\sin(\ln(t))}{t}dt$

Or : $\sum_{k=2}^{n} v_k = \int_{1}^{n}\frac{\sin(\ln(t))}{t}dt = \int_{0}^{\ln(n)}\sin(u)\,du$ = 1-cos(ln(n))

Ainsi, comme $\sum_{k=2}^{n} v_k$ n'a pas de limite, alors $\sum u_n$ diverge.

III. Compléments

1) Formule de Stirling
On a : n !$\sim_\infty \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

Application : Donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$

2) Séries alternées
a) Définition
On dit qu'une série $\sum u_n$ est alternée si la suite $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

b) Théorème
Si $\sum u_n$ est alternée et le terme général décroit en valeur absolue et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.
Ce théorème est le critère spécial des séries alternées (CSSA)

Démonstration :
Quitte à changer u_n en – u_n , on peut supposer que $u_n=(-1)^n v_n$ avec (v_n) positive.
$S_{2n+2} = S_{2n} - v_{2n+1} + v_{2n+2}$ et $S_{2n+3} = S_{2n+1} - v_{2n+3} + v_{2n+2}$
Or la décroissance de v_n donne : $S_{2n+2} \leq S_{2n}$ et $S_{2n+1} \leq S_{2n+3}$
La suite S_{2n+1} est croissante et S_{2n} décroissante.
De plus : $S_{2n+1} - S_{2n} = v_{2n+1}$
D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$
Les suites S_{2n+1} et S_{2n} sont adjacentes donc S_n converge.

On peut montrer que : R_n est du signe de $(-1)^{n+1}v_{n+1}$ donc du signe de u_{n+1}

Et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

Application : Montrer que pour tout $\alpha>0$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge

c) Théorème de « maîtrise » du reste
Si $\sum u_n$ est alternée et le terme général décroit en valeur absolue et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.
Et si $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, alors R_n est du signe de u_{n+1} et vérifie : $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

3) Règle de d'Alembert
Soit (u_n) une suite à termes non nuls (à partir d'un certain rang) telle que :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L \in \mathbb{R}+ \cup \{+\infty\}$
Si $L<1$, alors la série converge absolument et donc converge
Si $L>1$, alors la série diverge (grossièrement)
Si $L=1$, il s'agit encore d'un cas « douteux »

Démonstration :
Supposons $L<1$ et fixons $\rho \in {}^\circ]L, 1[$
On peut choisir un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, u_n \neq 0 \text{ } et \text{ } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \rho$
Par récurrence : $\forall n \geq n_0$, $0 \leq |u_n| \leq |u_{n_0}|\rho^{n-n_0}$
D'où la convergence.
De même pour $L>1$ et fixons $\rho \in {}^\circ]1, L[$, $|u_n| \geq |u_{n_0}|\rho^{n-n_0}$
D'où la divergence.

Application : Pour $z \in \mathbb{C}^*$, démontrer la convergence absolue de $\sum \frac{z^n}{n!}$

IV. <u>Techniques de comparaison</u>

1) Comparaison série-intégrale avec décroissance
Soit $f \in \mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{R}+)$ une fonction décroissante et intégrable
Alors la série $\sum f(n)$ est convergente.

De plus : $\int_n^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leq f(n) + \int_n^{+\infty} f(t)dt$

Application : Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

2) Produit de Cauchy de deux séries

a) Définition :
Soit : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes
On appelle le produit de Cauchy de ces deux séries, la série de terme général :
$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

b) Théorème
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes complexes convergent absolument, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ de ces deux séries converge absolument et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$

Etude d'un exercice « classique »

Soit a$\in \mathbb{C}$ $tel\ que$ $|a| < 1$, montrer que : $\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$

V. Développement asymptotique

C'est une technique très utilisée pour les séries à termes quelconques pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple, pour les séries à termes positifs par exemple, il suffit de se ramener à un équivalent, ceci n'est plus le cas avec les séries à termes quelconques. Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure. Dans ces cas, il suffit de donner un développement asymptotique du terme général.

Etude d'un exemple :

Soit la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, la suite n'est pas décroissante donc on ne peut pas appliquer le critère des séries alternées.

Mais on a , dans ce cas on va utiliser un développement limité au voisinage de 0

Ainsi : $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}(1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))$

Donc : $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^3})$

Or $\frac{(-1)^n}{n}$ est le terme d'une série convergente par le CSSA

Les termes $\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^3})$ correspondent à des termes de série ACV.

VI. Une application intéressante : l'exponentielle

1) Pour tout u$\in \mathbb{C}$, la série $\sum\frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente, sa somme est appelée l'exponentielle de u, et est notée exp(u)
   Ainsi : $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!}$

   Démonstration :
   On a : $\left|\frac{u^n}{n!}\right| \leq \frac{|u|^n}{n!}$ et on applique le critère de d'Alembert à la série de terme général : $\frac{|u|^n}{n!}$

2) On a : $\forall(z,z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$

   Démonstration: $\forall(z,z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}.\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!})$
   D'où: $\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k z'^{n-k}) = \exp(z+z')$