Chapitre 1 :

Logique

I. Modes de raisonnement

1) Assertions

Une *assertion* est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse

Ex : 3 est un nombre impair

Par convention, si P est une assertion, on écrit le plus souvent « Supposons P » plutôt que « Supposons que P soit vraie »

2) Connecteurs

P et Q désignent ici deux assertions :

-« **négation** » : La négation de P est une assertion qui est vraie lorsque P est fausse et qui est fausse lorsque P est vraie. On la note : **NON P**

-« **conjonction** » : La conjonction de P et Q est une assertion qui est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon. On la note : **P ET Q**

-« **disjonction** » : La disjonction de P et Q est une assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux est vraie, et fausse sinon. On la note **P OU Q**

-« **équivalence** » : L'équivalence entre P et Q est une assertion qui est vraie lorsque P et Q sont vraies, ou lorsque P et Q sont fausses, et qui est fausse sinon. On la note : **P $\Leftrightarrow$ Q**

-« **implication** » : L'implication de Q par P, est une assertion qui est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, et qui est vraie dans tous les autres cas.

On la note : **P $\Rightarrow$ Q**

P	Q	P ET Q	P OU Q	P $\Leftrightarrow$ Q	P $\Rightarrow$ Q	NON P
Vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	Fausse
Vraie	fausse	fausse	vraie	fausse	fausse	Fausse
Fausse	vraie	fausse	vraie	fausse	vraie	Vraie
Fausse	fausse	fausse	fausse	vraie	vraie	vraie

Ex : L'assertion « $3=4 \Rightarrow 8=2$ » est vraie puisque $3=4$ est fausse...

Remarque : Il peut être pratique à la manière du logicien Boole, de remplacer vraie par 1, et fausse par 0, et de voir certaines opérations arithmétiques derrière le ET, le OU etc.

3) Quelques propriétés

P, Q et R désignent 3 assertions, alors :

P et (Non P) est fausse

P ou (Non P) est vraie, il s'agit du principe du tiers-exclu

Non (Non P) et P sont équivalentes

Non (P OU Q) et (Non P) ET (Non Q) sont équivalentes

P OU (Q OU R) et (P OU Q) OU R sont équivalentes.

Preuve : Utiliser une table de vérité...

Exercice d'application : A l'aide d'une table de vérité, montrer que :

$[\text{Non} (P \text{ ET } Q)]$ et $[(\text{Non } P) \text{ OU } (\text{NON } Q)]$ sont équivalentes

$[(P \text{ ET } Q) \text{ ET } R]$ et $[P \text{ ET } (Q \text{ ET } R)]$ sont équivalentes

P	Q	P et Q	Non(P et Q)	Non P	Non Q	Non P ou Non Q
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

P	Q	R	P et Q	(P et Q) et R	Q et R	P et (Q et R)
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

4) Autres propriétés

Soient P et Q deux assertions,

$P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(\text{NON } P) \text{ OU } Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	Non P	Q	(Non P) ou Q
0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1

$P \Leftrightarrow Q$ est équivalente à $(P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P)$ (démonstration en exercice)

5) Quelques remarques :

Ne jamais utiliser le symbole $\Rightarrow$ comme un donc

$P \Rightarrow Q$ peut se comprendre comme « P est **une condition suffisante** pour que Q soit vraie »

$P \Rightarrow Q$ peut se comprendre comme « Q est **une condition nécessaire** pour que P soit vraie »

$P \Leftrightarrow Q$ peut se comprendre comme P est vraie si et seulement si Q est vraie.

La négation d'une implication n'est pas une implication ! puisqu'elle correspond à $\text{Non}(P \Rightarrow Q)$, équivalente à $\text{Non}((\text{NON } P) \text{ OU } Q)$, soit $P \text{ ET } (\text{Non } Q)$

II. Modes de raisonnement

1) Raisonnement par contraposée

Soient P et Q deux assertions

L'assertion $(\text{NON } Q) \Rightarrow (\text{NON } P)$ est la *contraposée* de $P \Rightarrow Q$

Une implication et sa contraposée étant équivalentes, pour démontrer $P \Rightarrow Q$, il peut être plus commode de démontrer sa contraposée.

Ex : Montrer que si n est un entier vérifiant n^2 pair alors n est pair.

Démonstration : Montrons que si n est impair alors n^2 est impair.

Si n est impair, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1$ et $n^2 = 2(2k^2+2k) + 1$

Et n^2 impair.

2) Raisonnement par double implication

Pour démontrer que $P \Leftrightarrow Q$, on peut montrer : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

On dit qu'on procède par *double implication*.

Ex : Soit n un entier, montrer que n^2 est impair si et seulement si n est impair.

Si n est impair, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1$ et $n^2 = 2(2k^2+2k) + 1$, donc n^2 impair

Montrons que si n^2 est impair alors n impair ou par contraposée, si n est pair alors n^2 pair ce qui a été démontré au 1)

3) Raisonnement par disjonctions de cas.

Il peut être utile de séparer les différents cas de figure

4) Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une assertion P est vraie, on peut supposer qu'elle est fausse et aboutir à une contradiction.

Ex : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec

$\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Alors : $p^2 = 2q^2$ donc p^2 pair et p pair

Comme p est pair, $\exists p' \in \mathbb{Z}, p = 2p'$ d'où : $4p'^2 = 2q^2$ et $2p'^2 = q^2$ ainsi q^2 pair et q pair.

Or p et q sont premiers entre eux ce qui est absurde !

5) Raisonnement par *analyse-synthèse*.

L'analyse : On suppose a priori que l'objet existe pour pouvoir déterminer des propriétés le concernant.

La synthèse : On définit l'objet et on vérifie qu'il est bien solution du problème.

La conclusion : On donne la ou les solutions du problème (s'il y en a)

Ex : Déterminer les réels x tels que : $1+x \geq 0$ et $1-x^2 = \sqrt{1+x}$

Analyse : Si $1-x^2 = \sqrt{1+x}$ alors $(1-x^2)^2 = 1+x$

Et, $x^4 - 2x^2 - x = 0, x(x^3 - 2x - 1) = 0$

Or -1 est une racine évidente de x^3-2x-1 , et $x^3-2x-1 = (x+1)(x^2-x-1)$

Comme $x^2-x-1 = (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$

D'où les solutions potentielles : $0, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Synthèse : Parmi les solutions potentielles, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est à retirer car $1-x^2 < 0$ pour $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Par analyse-synthèse, les solutions sont : $0, -1$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Exercice : Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

III. Les quantificateurs

1) Définitions :

Les notions d'éléments et d'ensembles sont vus ici comme des notions premières. En particulier, la notion d'ensemble sera vue comme une « collection d'objets ».

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E :

On note : $\forall x \in E P(x)$ l'assertion qui est vraie, si pour tout x de E , $P(x)$ est vraie.

On note : $\exists x \in E P(x)$ l'assertion qui est vraie s'il existe un élément x de E telle que $P(x)$ soit vraie.

On note : $\exists! x \in E P(x)$ l'assertion qui est vraie s'il existe un unique élément x de E telle que $P(x)$ soit vraie.

Ex : L'assertion : $\exists n \in \mathbb{Z}, n+1 = 0$ est vraie mais $\forall n \in \mathbb{Z}, n+1 = 0$ est fausse.

2) Négations

Si $P(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre x de E alors :

La négation de $[\forall x \in E, P(x)]$ est : $[\exists x \in E, \text{NON}(P(x))]$

La négation de $[\exists x \in E P(x)]$ est : $[\forall x \in E, \text{NON}(P(x))]$

Exercice d'application : Ecrire la négation des assertions suivantes :

$\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)$

$\forall x \in E, A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Solutions: $\exists x \in E, \text{non}[A(x) \Rightarrow B(x)]$, c'est-à-dire, $\exists x \in E, A(x)$ et $[\text{non } B(x)]$

Et : $\exists x \in E, \text{non}[A(x) \Leftrightarrow B(x)]$, c'est-à-dire, $\exists x \in E, [A(x)$ et $[\text{non } B(x)]]$ ou $[\text{non}[A(x)]$ et $B(x)]$

3) Succession de quantificateurs

Attention à bien appréhender la succession des quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Ex : Que signifie chacune de ces assertions ?

$A : \exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(a)$ et $B : \forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} f(x) \leq f(a)$

Remarque : On peut en revanche inverser sans problème 2 signes $\forall$ d'affilée, ou deux signes $\exists$ d'affilée.

Pour A : $f(a)$ est un minimum absolu pour f . Pour B : on ne dit rien...

IV. Le raisonnement par récurrence

1) Théorème

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$

Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Démonstration...Enfin presque !

Lemme : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (propriété admise...)

Raisonnons par l'absurde, supposons que P ne soit pas vérifiée sur tout $\mathbb{N}$.

L'ensemble A des entiers n pour lesquels $P(n)$ est fausse est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet donc un plus petit élément : n_0

Comme $P(0)$ est vraie, $0 \notin A$, donc $n_0 > 0$ et $n_0 - 1$ est bien un entier naturel.

L'entier $n_0 - 1$ ne peut pas appartenir à A , sinon cela contredirait le caractère minimal de n_0 donc $P(n_0 - 1)$ est vraie.

Mais alors $P(n_0)$ est vraie ce qui contredit l'appartenance de n_0 à A .

2) Remarque

On peut amorcer la récurrence à partir d'un rang n_0 :

Si $P(n_0)$ est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$

Ex : Montrer par récurrence qu'à partir d'un certain rang $n! \geq 2^{n+1}$

3) Récurrence forte :

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$

Si $P(0)$ est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N} P(0) \text{ ET } \dots \text{ ET } P(n-1) \Rightarrow P(n)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Démonstration : On démontre par récurrence simple que $H_n : "\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket P(k)"$ est vraie sur $\mathbb{N}^*$

Remarque : Dans un raisonnement par récurrence, l'hypothèse de récurrence ne peut jamais porter pour tout entier naturel puisque c'est précisément ce que l'on cherche à démontrer...

Exercice :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$

#Exprimer $u_{n+1} - u_{n-1}$ en fonction de u_n

#Montrer que pour tout entier naturel n , u_n est pair.

V. Les ensembles

1) Définitions :

Soit E un ensemble. On dit que x est un élément de E lorsque x appartient à E . On note alors $x \in E$, lorsque x n'appartient pas à E , on note $x \notin E$.

On appelle ensemble vide, l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$

Si E possède un nombre fini d'éléments, on dit que E est **fini** et on désigne par **Card(E)** le nombre de ses éléments.

2) Ecriture

Il y a deux écritures possibles pour un ensemble (on peut passer d'une écriture à l'autre)

a) **Ecriture en extension.**

$A = \{x, y, z\}$ pour un ensemble fini. $B = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ pour un ensemble non fini.

$\{a\}$ est un **singleton**.

$\{a, b\} = \{b, a\}$

b) **Ecriture en compréhension**

$C = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 = 0\}$. Mais on peut réécrire B comme $B = \{n \in \mathbb{N}^*\}$

3) Inclusion

Soient A et B deux ensembles :

On dit que A est inclus dans B lorsque tout élément de A est un élément de B . On le note **$A \subset B$** .

On dit que les ensembles A et B sont égaux lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$. On note $A = B$.

Soit E un ensemble, on dit que A est un sous-ensemble (ou une partie) de E lorsque $A \subset B$.

Notation : Si E est un ensemble, **on note $P(E)$ l'ensemble des parties de E** .

Ainsi $P(E)$ est un ensemble dont tous les éléments sont des ensembles.

Ecrire $F \in P(E)$ signifie que F est un ensemble et que $F \subset E$.

Exemple :

Si $E = \{a, b, c\}$, alors $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

4) Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E , on appelle :

-réunion de A et de B , notée $A \cup B$, l'ensemble : $\{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

-intersection de A et de B , notée $A \cap B$, l'ensemble : $\{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$

-complémentaire de A dans E , noté $\bar{A}$, l'ensemble : $\{x \in E, x \notin A\}$

-différence de A et de B , noté $A \setminus B$ l'ensemble : $\{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\}$

On remarque ainsi que $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

5) Proposition

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E alors :

-l'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

-la réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6) Proposition : Lois de Morgan

Soient A et B deux parties d'un ensemble E, alors :

$$\text{On a } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\text{Et : } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Démonstration : En exercice...

7) Partition

Soit E un ensemble, soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille de sous-ensembles de E. **On dit que la famille $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de E si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = E$**

Exemple : Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\{A, \bar{A}\}$ est une partition de E.

8) Cardinalité

Si E et F sont deux ensembles finis et disjoints alors $E \cup F$ est un ensemble fini de cardinal : $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$

Soit E un ensemble fini et A, B deux sous-ensembles de E. On a :

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

9) Définitions

a) Produit cartésien de deux ensembles :

Soient E et F deux ensembles, on appelle produit cartésien de E et de F et on le note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$

En d'autres termes : $E \times F = \{(x, y) ; x \in E ; y \in F\}$

Remarque : Pour $E \neq F$, $E \times F \neq F \times E$

Soit $A_1 = \{a, b, c\}$ et $A_2 = \{5, 7\}$. Alors $A_1 \times A_2 = \{\{a, 5\}, \{a, 7\}, \{b, 5\}, \{b, 7\}, \{c, 5\}, \{c, 7\}\}$

Exercice :

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n (p et n sont deux entiers non nuls)

Montrer que l'ensemble des applications différentes de E vers F est n^p

b) Produit cartésien d'un ensemble fini d'ensembles.

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ des ensembles.

On appelle p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ la donnée de $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p$ dans cet ordre.

L'ensemble des p-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p$ est appelé produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_p$.

En d'autres termes : $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) ; x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p\}$

Cas particulier : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E^p = E \times \dots \times E$ l'ensemble des p-uplets formés d'éléments appartenant tous à E.