Suites de fonctions

I. Modes de convergence

1) Convergence simple

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\in \mathcal{F}(I,K)$ si pour tout x de I, on a : $f_n(x) \to f(x)$ lorsque n$\to +\infty$

Remarque :

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, si pour tout x de I, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Exemple :

Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : f_n :[0 ;1]$\to$ $\mathbb{R}$, x$\to$ x^n

Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Attention : Certaines propriétés analytiques ne « passent pas à la limite », par exemple, la continuité (comme le montre l'exemple précédent !)

En revanche si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement, respectivement, vers f et g alors $f_n + g_n$ converge vers f+g.

2) Convergence uniforme

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers $f\in \mathcal{F}(I,K)$ si pour :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Remarques :

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, si la fonction f_n-f est bornée à partir d'un certain rang et si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

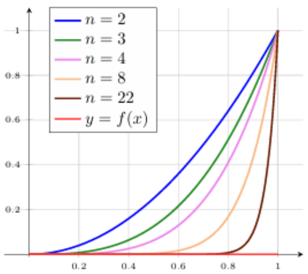

Illustration de l'étude de la convergence uniforme de x$\to$ x^n

3) Proposition

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.

Démonstration :

On a : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Donc, $\forall x \in I, \forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ *ce qui signifie bien que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers f*

Exemple :

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}}$ converge uniformément vers la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

En effet, on montre que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq f_n(x)-f(x) \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Remarque : Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
On peut chercher à exhiber une suite (x_n) d'éléments de I telle que : $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tende pas vers 0

Exemple : Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{x+\sqrt{n}}{x+n}$ converge simplement vers la fonction nulle.
Puis à l'aide de $x_n=n$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
Exercice classique : Obtention de la convergence uniforme par découpage d'intervalle.

Soit la suite de fonctions : $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $\forall x > 0$, $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$

0) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$
1) Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
2) Etablir la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
   Ind. Distinguer suivant que $x\in]0,\frac{1}{n}]$ ou que $x\in [\frac{1}{n}, +\infty[$

II. <u>Régularité de la limite</u>

1) Continuité
   Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f et si pour tout entier naturel n, f_n est continue, alors f est continue.

   Démonstration :
   On remarque que $f(x)-f(a) = (f(x)-f_n(x))+(f_n(x)-f_n(a))+(f_n(a)-f(a))$
   Or $f(x)-f_n(x)$ et $f_n(a)-f(a)$ tend vers 0 par convergence uniforme
   Et $f_n(x)-f_n(a)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a par continuité

2) Intégration
   On suppose que I = [a,b] avec a<b et que les fonctions f_n sont continues.
   Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$

   Démonstration :
   On a : $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b f_n - f\right| \leq \int_a^b |f_n - f|$
   Puisque la convergence est uniforme et que les fonctions sont continues sur le segment [a,b], elles sont donc bornées.
   Ainsi : $0 \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty = (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0$

   Etude d'un exercice « classique »

   Pour n≥1 , et $x\in[0,1]$, on pose : $f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$

   Montrer que f_n converge uniformément vers $f(x) = (x^2+1)e^x$ (ind. Montrer que $f_n(x) - f(x) \leq \frac{2(e+1)}{n}$)

   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ (on doit obtenir 2e-3 après IPP)

3) Dérivation
   Si pour tout entier naturel n, les fonctions f_n sont C^1

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f
Si la suite $(f_n{}')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g
Alors : f est C^1 et $f' = g$.

Démonstration :
Soit x et a dans I
On a : $f_n(x)-f_n(a) = \int_a^x f_n{}'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt$ *d'après le théorème précédent*
Or par convergence simple de f_n *vers f, on a :* $f_n(x)-f_n(a) \to f(x) - f(a)$
Donc $f(x)=f(a) + \int_a^x g(t)dt$ *or* $x \to \int_a^x g(t)dt$ *est* C^1*, il en va de même pour f.*

4) Théorème sur la dérivation d'ordre supérieur
Soit p un entier non nul
Si pour tout entier naturel n, les fonctions f_n sont C^p
Si pour tout k$\in [\![0, p-1]\!]$ la suite $\left(f_n{}^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
Si la suite $\left(f_n{}^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I
Alors : la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est C^p
et pour tout k$\in [\![0, p-1]\!]$, $\forall x \in I, f^k(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}^{(k)}(x)$

5) Théorème de la double limite
Soit (f_n) un suite de fonctions définies sur un intervalle I, soit $\alpha \in \bar{I}$
S'il existe une suite $(l_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to\alpha} f_n(x) = l_n$
Si la suite (f_n) converge uniformément sur I alors :
$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to\alpha} f_n(x) = \lim_{x\to\alpha} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

III. Le théorème de convergence dominée.

1) Le théorème (admis)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I.
S'il existe φ :I$\to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in$ I, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ (c'est l'hypothèse dite de domination)

Alors : toutes les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que f sont intégrables et de plus :
On a $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$

2) Exemple:
Soit f_n:$]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, t$\to \frac{1+t^n}{1+t^{n+2}}$ et $I_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)dt$
Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$
Tout d'abord, on fixe t>1, $\frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{t^2}$, donc la suite $\frac{1+t^n}{1+t^{n+2}}$ converge simplement vers t$\to \frac{1}{t^2}$ continue par morceaux sur $]1,+\infty[$
Vérifions l'hypothèse de domination :
Pour t>1, $\frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \leq \frac{t^n+t^n}{1+t^{n+2}} = \frac{2}{t^2}$ fonction intégrable sur $]1,+\infty[$
Donc $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$