Statique des fluides

1. Généralités sur les fluides

1.1. Description d'un fluide aux échelles macroscopique et microscopique

Échelle macroscopique

L'échelle macroscopique est l'échelle globale relative à l'ensemble du système, souvent l'échelle humaine. La matière est continue, mais ses propriétés (température, masse volumique, etc.) peuvent être inhomogènes.

À l'**échelle macroscopique**, un fluide est un milieu matériel capable de se déformer et de s'écouler jusqu'à adopter la forme du récipient qui le contient.

Échelle microscopique

L'échelle microscopique est celle des atomes et des molécules : la matière est discontinue, c'est le monde de la mécanique quantique et de la physique statistique.

Longueur caractéristique (distance intermoléculaire typique) :

- dans un solide cristallin : paramètre de maille $a \approx 10^{-9} - 10^{-10}\ m$;
- dans un fluide : libre parcours moyen l^* (distance parcourue par la une molécule entre deux collisions successives) $l^*_{liq} \approx 10^{-9}\ m$ et $l^*_{gaz} \approx 10^{-7}\ m$ à 300 K.

À **l'échelle microscopique**, un fluide est caractérisé par des interactions intermoléculaires suffisamment faibles par rapport l'agitation thermique pour que les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres.

1.2. À l'échelle mésoscopique : modèle de la particule de fluide

Échelle mésoscopique

On appelle **échelle mésoscopique** une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique : la longueur caractéristique est très faible devant la taille totale du système, mais très grande devant la distance intermoléculaire. À cette échelle, la matière est continue mais ses propriétés localement homogènes.

Une **particule de fluide** est un système fermé (donc de masse δm constante au cours du temps), correspondant au fluide situé à l'intérieur d'un volume mésoscopique $d\tau$.

Une particule fluide contient un très grand nombre de molécules, ce qui permet d'y définir des grandeurs intensives macroscopiques telles que la pression P et la température T qui pourront être considérées comme uniformes à l'échelle mésoscopique (c'est à dire indépendantes des coordonnées d'espace). On parle de grandeurs **locales**.

Une particule de fluide peut être immobile ou en mouvement (si le fluide s'écoule). Sa masse est constante, mais son volume peut varier : une particule de fluide est caractérisée par un nombre de molécules, pas par des dimensions.

Masse volumique

La masse volumique de la particule de fluide, située au voisinage du point M, a pour expression :

$$\rho(M) = \frac{\delta m}{d\tau}$$

Un fluide est qualifié de **compressible** si sa masse volumique $\rho(M)$ est variable, c'est-à-dire si une particule de fluide, de masse δm, a un volume $d\tau(M)$ différent selon le point M où elle se trouve.

Il est qualifié d'**incompressible** si sa masse volumique $\rho(M)$ est une constante, caractéristique du fluide.

Remarques :

- Un gaz est compressible.
- Un liquide est peu compressible (en 1ère approximation il peut être considéré comme incompressible).

1.3. Sommer pour passer du mésoscopique au macroscopique

Application : Masse d'air

Un modèle simple d'atmosphère à température uniforme, conduit à une évolution de la masse volumique avec l'altitude z selon :

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(-\frac{z}{H})$$

avec $\rho_0 = 1{,}3\ kg.m^{-3}$ et $H = 8\ km$ (hauteur d'échelle).

En supposant ce modèle valable pour tout $z > 0$, calculer la masse de la colonne d'air que vous portez sur vos épaules ($S \approx 1\ m^2$).

<u>Principe</u> :

la masse est une grandeur additive, calculer la masse totale d'un système macroscopique se fait en sommant la masse de chaque particule fluide appartenant à ce système.

$$m_{totale} = \sum dm = \iiint \rho(M) d\tau$$

$$m_{totale} = \iiint \rho(M) dSdz$$

$$m_{totale} = \int_0^{+\infty} \rho_0 \exp(-\frac{z}{H})\, Sdz$$

$$m_{totale} = \rho_0 S \left[\frac{\exp(-\frac{z}{H})}{-\frac{1}{H}}\right]_0^{+\infty}$$

$$m_{totale} = \rho_0 SH \approx 10\ tonnes$$

1.4. Fluide au repos

Un fluide est dit **statique** ou au repos lorsqu'il ne possède aucun mouvement macroscopique.

Les particules de fluide d'un fluide statique sont donc à l'**équilibre mécanique**.

2. Forces dans un fluide au repos

On considère un fluide de volume V (mésoscopique ou macroscopique) délimité par une surface S.

On cherche à caractériser les différentes forces s'exerçant sur lui pour exploiter l'équilibre mécanique.

2.1. Forces volumiques

Les forces volumiques correspondent aux actions mécaniques de longue portée, et agissent dans le cœur du fluide étudié.

La **densité volumique de force** en M, ou **force volumique**, est :

$$\vec{f}(M) = \frac{\overrightarrow{\delta F}(M)}{d\tau}$$

où $\delta\vec{F}$ correspond à la force élémentaire exercée en M sur le volume $d\tau$ du fluide.

La densité volumique de force de pesanteur a pour expression : $\vec{f}_{pesanteur} = \rho(M)\vec{g}(M)$.

2.2. Forces de pression

La force de pression élémentaire exercée par le fluide extérieur sur le fluide étudié est donnée par :

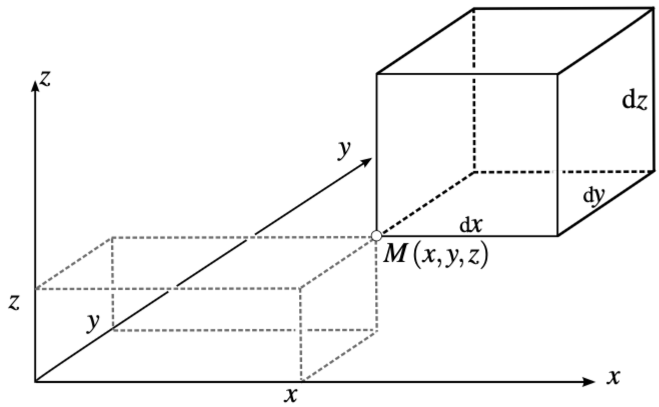
$$\overrightarrow{\delta F}_{pression} = -P(M)\overrightarrow{dS}$$

Avec $\overrightarrow{dS}$ dirigé de l'intérieur du fluide vers l'extérieur (c'est-à-dire selon la normale sortante $\vec{n}$).

La force de pression est orthogonale à la surface sur laquelle elle s'applique, c'est une force surfacique.

2.3. Résultantes des forces de pression sur une particule de fluide

On considère une particule de fluide infinitésimale, donc mésoscopique, par rapport à l'échelle macroscopique.



Cette particule est soumise aux forces de pression.

La résultante de ces forces est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta F}_{pression}(x,y,z) &= [P(x,y,z) - P(x+dx,y,z)]dydz\,\overrightarrow{ux} \\ &+ [P(x,y,z) - P(x,y+dy,z)]dxdz\,\overrightarrow{uy} \\ &+ [P(x,y,z) - P(x,y,z+dz)]dxdy\,\overrightarrow{uz}\end{aligned}$$

On peut faire un développement limité en utilisant la formule de Taylor-Young :

$$\overrightarrow{\delta F}_{pression}(x,y,z) = -\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)d\tau\,\overrightarrow{ux} - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z)d\tau\,\overrightarrow{uy} - \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)d\tau\,\overrightarrow{uz}$$

On reconnaît l'opérateur de dérivation spatiale **gradient** :

$$\overrightarrow{\delta F}_{pression} = -\overrightarrow{grad}\,P d\tau$$

La **densité volumique de force de pression** est :

$$\vec{f}_{pression} = -\overrightarrow{grad}\,P$$

Interprétation du signe « $-$ » : le vecteur $\overrightarrow{grad}\,P$ indique la direction dans laquelle la pression augmente, la résultante des forces de pression est au contraire dirigée des zones de fortes pression vers celles de basse pression.

3. Relation fondamentale de la statique des fluides

On se place dans un référentiel galiléen.

En y appliquant le principe fondamental de la statique à une particule de fluide, de masse δm , de volume $d\tau$, située dans le voisinage d'un point M, soumise à n forces volumiques de densités volumiques $\vec{f}_i(M)$, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i(M)\,d\tau - \overrightarrow{grad}\,P(M)d\tau = \vec{0}$$

La relation fondamentale de la statique des fluides est :

$$\overrightarrow{grad}\,P(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i(M)$$

Dans le cas où la seule force volumique réelle (en plus de l'équivalent volumique des forces de pression) est due à la pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides devient :

$$\overrightarrow{grad}\,P(M) = \rho\vec{g}$$

4. Évolution de la pression au sein d'un fluide incompressible dans un champ de pesanteur uniforme

On considère un fluide incompressible, c'est-à-dire dont la masse volumique ρ est constante (indépendante du temps) et uniforme (indépendante des coordonnées d'espace).

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

On adopte un système de coordonnées cartésiennes, l'axe (Oz) étant vertical ascendant.

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme.

En l'absence de forces volumiques autres que celle de pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit, dans le référentiel galiléen choisi, et après projection dans la base $(\overrightarrow{u_x},\ \overrightarrow{u_y},\ \overrightarrow{u_z})$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}$$

Les deux premières lignes montrent que la pression ne dépend ni de x ni de y. C'est donc une fonction d'une seule variable, z, et la dernière équation conduit à :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

L'intégration de cette équation différentielle donne :

$$P(z) = -\rho g z + K$$

La constante K se détermine grâce à la pression régnant à l'altitude $z = 0$:

$$P(z) = -\rho g z + P(0)$$

Au sein d'un fluide incompressible homogène à l'équilibre, la pression ne dépend que de l'altitude.

<u>Remarque</u> : En prenant l'axe (Oz) vertical descendant la relation devient : $P(z) = \rho g z + P(0)$

Exemple :

La pression au fond de la fosse des Mariannes (lieu le plus profond de l'océan, environ $11\ km$, au large des Philippines) vaut $P = 1{,}1.10^8\ bar$

5. Évolution de la pression au sein d'un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme

Si le modèle de fluide incompressible convient assez bien pour un liquide, il n'en est pas de même pour un gaz, dont la masse volumique peut évoluer sensiblement avec la pression et la température. On se limite ici à une atmosphère isotherme, et au modèle du gaz parfait, dont on rappelle l'équation d'état :

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

Une particule de fluide de masse δm occupe donc un volume $d\tau$:

$$Pd\tau = \frac{\delta m}{M}RT$$

La masse volumique du gaz parfait peut donc s'écrire :

$$\rho = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{PM}{RT}$$

En l'absence de forces volumiques autres que celle de pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides conduit à :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT} P = 0$$

ce qui constitue une équation différentielle linéaire homogène, du premier ordre, à coefficients constants, que l'on peut encore écrire :

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{H} P(z) = 0$$

en introduisant une distance caractéristique $H = RT/Mg$ appelée hauteur d'échelle.

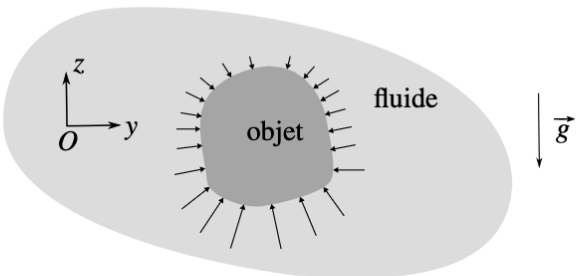
La solution de cette équation différentielle est :

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = P(0) \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

Dans l'atmosphère isotherme, la pression décroît exponentiellement avec l'altitude.

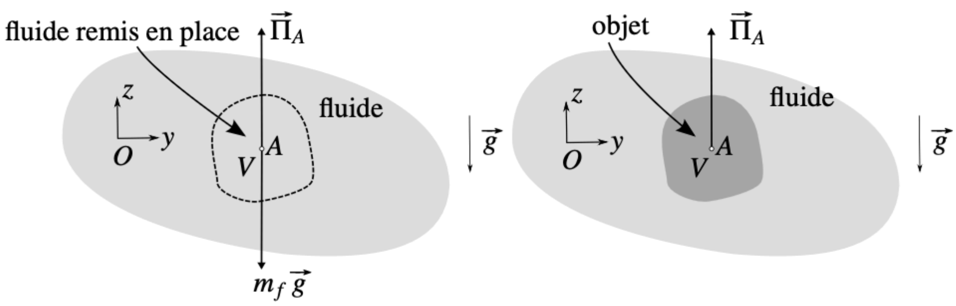
6. Poussée d'Archimède

Au sein d'un fluide en équilibre dans un champ de pesanteur, la pression n'est pas uniforme ; elle augmente à mesure que l'altitude diminue. Un objet placé dans le fluide subit donc des forces pressantes plus importantes sur le dessous que sur le dessus :



Dans un référentiel $\mathcal{R}$, la poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression exercées sur un objet immobile dans $\mathcal{R}$, par l'ensemble des fluides au repos qui l'entourent.

Par une expérience de pensée, retirons l'objet, de volume V, et remplaçons-le par le fluide, de même forme et de même volume V, occupant la même position. Puisque l'ensemble du fluide est supposé en équilibre, la portion de fluide remise en place l'est aussi.



Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen, le principe fondamentale de la statique conduit à :

$$m_f \vec{g} + \overrightarrow{\Pi_A} = \vec{0}$$

avec m_f la masse de ce volume V de fluide et $\overrightarrow{\Pi_A}$ la résultante des forces de pression s'exerçant aussi bien sur le fluide remis en place que sur l'objet, c'est-à-dire la poussée d'Archimède.

$$\overrightarrow{\Pi_A} = - m_f \vec{g}$$

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un objet immobile qu'il entoure, est verticale ascendante, et égale à l'opposé du poids du fluide déplacé. On la nomme **poussée d'Archimède**.