TD Statique des fluides

Relation de l'hydrostatique

Exercice 1 : Baromètre de Torricelli

Fig. 280. — Baromètre à siphon ordinaire.

Evangelista Torricelli (1608-1647) est connu pour ses nombreux travaux en mécanique des fluides, et en particulier l'invention du premier baromètre. Il s'agit d'un tube en U, dont l'extrémité haute est bouchée et l'extrémité basse ouverte, rempli de mercure. Le point B se trouve à la pression atmosphérique, la pression au dessus du point A est négligeable.

Donnée : masse volumique du mercure $\mu = 1{,}36 \cdot 10^4\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

1 - Déterminer la hauteur de liquide h entre les points A et B en fonction des grandeurs pertinentes.

2 - Comment peut-on mesurer concrètement la pression atmsophérique avec cet appareil ? Faire un schéma dans le cas où la pression atmosphérique est faible et un autre dans le cas où elle est élevée.

3 - Le Torr, nommé en hommage à Torricelli, est une unité de pression historique analogue au millimètre de mercure mmHg. On a la correspondance $1\,\mathrm{atm} = 760\,\mathrm{Torr}$: est-ce étonnant ?

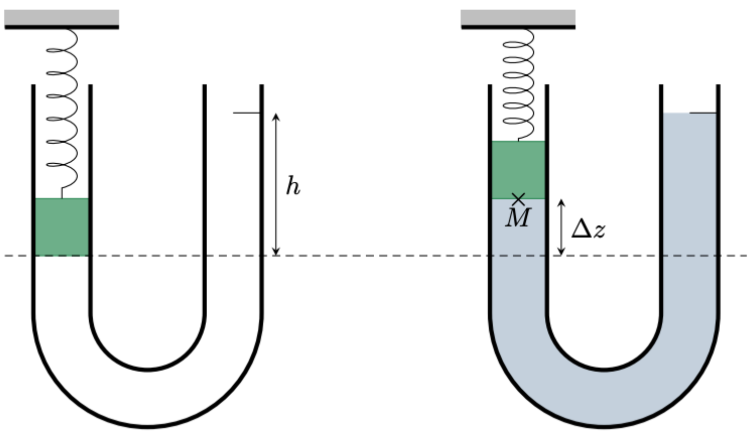
Exercice 2 : Deux liquides dans un tube en U

Considérons un tube en U de section $1\,\mathrm{cm}^2$ rempli d'eau jusqu'à $10\,\mathrm{cm}$ du fond. On ajoute $3\,\mathrm{mL}$ d'huile d'olive de densité 0,92 dans une des branches du tube. Calculer la hauteur à laquelle se trouvent les deux surfaces libres et l'interface entre l'huile d'olive et l'eau.

Exercice 3 : Ressort et tube en U

On dispose dans un tube en U un bouchon de masse m et de section S égale à la section du tube dans lequel il oscille sans frottement. Un ressort de raideur k est accroché d'une part au bouchon et d'autre part à un point fixe, voir figure 1. Une graduation se trouve à une hauteur h au dessus de la position initiale du bouchon. On note $\Delta\ell_0$ son allongement dû à la pesanteur.

On remplit le tube d'un liquide de masse volumique ρ inconnue jusqu'à la graduation. Le bouchon remonte de Δz par rapport à sa position initiale. On note P la pression au niveau du point M et P_{atm} la pression atmosphérique.



1 - Déterminer l'expression de $\Delta\ell_0$ en fonction de k et m.

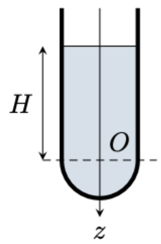
2 - Écrire l'équation d'équilibre du bouchon en fonction des pressions et de $\Delta\ell$.

3 - Déterminer l'expression de ρ en fonction des données du problème.

4 - Calculer ρ pour un tube de diamètre $d = 2\,\mathrm{cm}$, avec $\Delta z = 1\,\mathrm{cm}$, $h = 10{,}7\,\mathrm{cm}$, et $k = 30\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

Forces pressantes

Exercice 4 : Force de pression sur un tube à essais



On considère un tube à essais rempli d'un liquide incompressible de masse volumique ρ. On raisonne sur un axe vertical z descendant dont l'origine se trouve comme indiqué sur le schéma ci-contre.

1 - Calculer la pression $P(z)$.

2 - Justifier que la résultante des forces pressantes sur la partie cylindrique du tube est nulle.

3 - Déterminer la direction de la résultante des forces de pression subies par la portion hémisphérique du tube.

4 - Faire le calcul. Commenter.

Données :

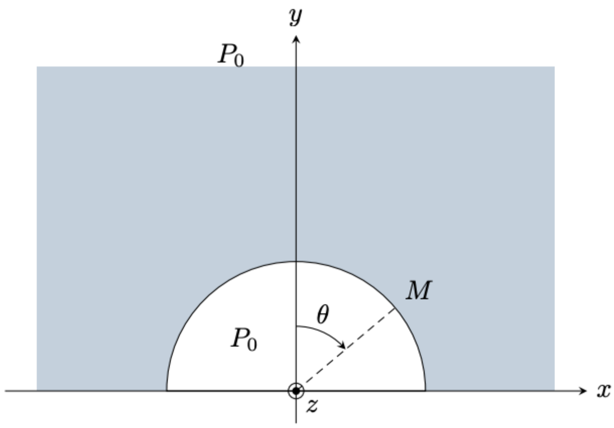
$$\int \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = -\frac{\cos(2\theta)}{4} + \mathrm{cte} \qquad \text{et} \qquad \int \cos^2\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3} + \mathrm{cte}$$

Exercice 5 : Tunnel de l'aquarium Nausicaa

L'aquarium Nausicaa de Boulogne-sur-Mer est le plus grand d'Europe. Parmi les divers espaces dans lesquels il propose à ses visiteurs d'observer les animaux marins figure un tunnel sous-marin long de 18 m. Ce tunnel peut être approximé par un demi-cylindre de rayon $a = 3\,\mathrm{m}$ et de longueur $L = 18\,\mathrm{m}$ se trouvant au fond d'un bassin profond de $H = 8\,\mathrm{m}$. On cherche à estimer la résultante des forces pressantes subies par les vitres constituant le tunnel.

1 - Exprimer le champ de pression $P(y)$ dans l'eau de l'aquarium.

2 - Montrer sans calcul que la résultante des forces pressantes subies par le tunnel est dirigée selon $-\vec{e}_y$.

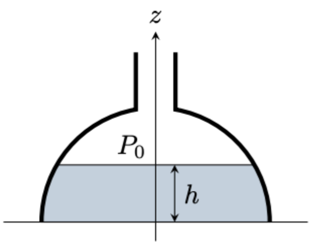


3 - Montrer que la composante $\mathrm{d}F_{p,y}$ de la force pressante subie par l'élément de surface $\mathrm{d}S$ centré sur le point M s'écrit

$$\mathrm{d}F_{p,y} = \left(\frac{1}{2}\rho g a^2 - \rho g H a \cos\theta + \frac{1}{2}\rho g a^2 \cos(2\theta)\right) \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \, .$$

4 - En déduire la résultante des forces pressantes. Calculer sa valeur numérique.

Exercice 6 : Entonnoir retourné



Un entonnoir en forme de demi-sphère de rayon R est retourné et posé au fond d'un évier, puis progressivement rempli d'eau de masse volumique μ_0 constante jusqu'à une hauteur h. L'air environnant est à pression P_0 uniforme. Le but de l'exercice est de montrer que (même en l'absence de fuite !) l'entonnoir se soulève pour une hauteur d'eau critique h_c.

1 - Quelle est la force responsable du soulèvement ? En déduire qu'il est nécessaire de prendre en compte les variations de pression avec l'altitude dans l'eau, même si elles sont faibles. Exprimer le champ de pression dans l'eau en fonction de z et h.

2 - Déterminer sans calcul la direction de la force pressante exercée sur l'entonnoir, et montrer qu'elle vaut

$$\vec{F} = \pi \mu_0 g \frac{h^3}{3} \vec{e}_z \,.$$

3 - Déterminer la hauteur critique h_c. Pouvez-vous faire l'expérience chez vous ?

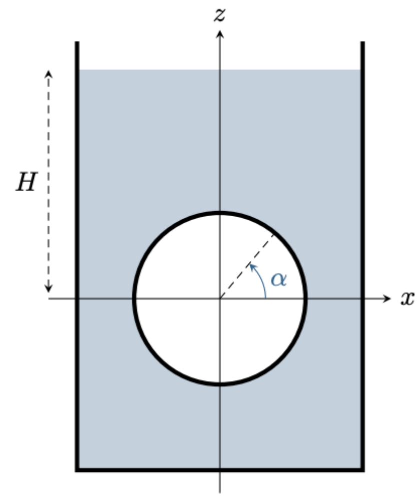
Exercice 7 : Hublot d'aquarium

Certains aquariums proposent à leurs visiteurs d'observer les animaux marins au travers de hublots circulaires, voir figure 3. Le but de cet exercice est de calculer la force pressante exercée par l'eau sur le hublot. Le hublot a un rayon $R = 1\,\mathrm{m}$ et son centre se trouve à une profondeur $H = 5\,\mathrm{m}$ sous la surface. L'axe (Oz) est vertical ascendant et son origine est prise au centre du hublot. Les points à la périphérie de l'aquarium sont repérés par l'angle α défini sur la figure.

1 - Exprimer la pression dans l'eau en fonction de z et de la pression atmosphérique P_0.

2 - Exprimer z en fonction de α, puis en déduire $\mathrm{d}z$ en fonction de $\mathrm{d}\alpha$.

3 - Montrer que la bande de hublot comprise entre les ordonnées z et $z + \mathrm{d}z$ a pour surface $\mathrm{d}S = 2R^2 \cos^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha$.



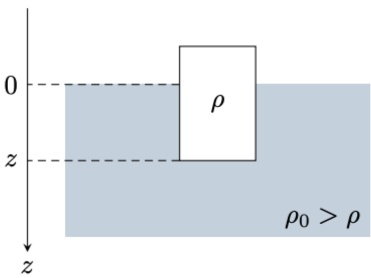
4 - En déduire la résultante des forces de pression subies par le hublot de l'aquarium. On donne

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin u \, \cos^2 u \, \mathrm{d}u = 0 \,.$$

5 - Comment aurait-on pu anticiper qualitativement ce résultat ?

Poussée d'Archimède

Exercice 8 : Oscillation d'un flotteur



On modélise un flotteur (bouchon de pêche, bouée, etc.) par un cylindre de masse volumique ρ plongeant partiellement dans l'eau de masse volumique $\rho_0 > \rho$. On suppose son axe de révolution constamment vertical.

1 - Déterminer la hauteur immergée à l'équilibre.

2 - Quelle est la force à exercer sur le flotteur pour l'immerger en entier ?

3 - À partir de la position d'équilibre déterminée précédemment, on enfonce légèrement le cylindre avant de le relâcher. Montrer que le cylindre effectue des oscillations et déterminer leur période.

Champ de pression

Exercice 9 : Champ de pression dans l'atmosphère

Des mesures météorologiques dans l'atmosphère permettent de montrer que la température y évolue de manière affine par morceaux. Ces variations étant très stables et reproductibles, elles ont été compilées dans un modèle appelé « International Standard Atmosphere » qui sert de base aux météorologues. L'origine se trouvant à la surface de la Terre, ce modèle prend comme références

$$T(z{=}0) = T_0 = 15\,°\mathrm{C} \qquad \text{et} \qquad P(z{=}0) = P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

et donne la valeur du gradient thermique à toute altitude. On s'intéresse ici aux 11 premiers kilomètres de l'atmosphère (troposphère), où

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -k = -6{,}5\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{km}^{-1}\,.$$

1 - Déterminer la température en fonction de l'altitude dans la troposphère.

2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression atmosphérique $P(z)$.

3 - Résoudre cette équation différentielle.

Exercice 10 : Ballon sonde

Un ballon sonde est assimilé à une sphère indéformable de rayon $R_0 = 2\,\mathrm{m}$ remplie d'hélium, ouverte par le bas, ce qui permet à l'hélium de s'échapper au fur et à mesure de l'ascension et au ballon de demeurer en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère. Le ballon de masse à vide 1 kg est conçu pour emporter des équipements scientifiques. La température de l'atmosphère suit la loi $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$ avec $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}$.

1 - Déterminer la constante β telle que le champ de pression atmosphérique s'écrive

$$P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta\,.$$

2 - En déduire l'évolution de la masse volumique de l'air avec l'altitude.

3 - Déterminer la masse d'hélium restant dans le ballon en fonction de l'altitude.

4 - En déduire la masse maximale que peut soulever le ballon à l'altitude z.

5 - Application numérique : calculer cette masse au niveau du sol et à 10 km d'altitude.

Données :

- ▹ masse molaire de l'air $29{,}0\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ et de l'hélium $4{,}0\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$;
- ▹ constante des gaz parfaits $R = 8{,}3\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.