Cinématique des fluides

1. Description du mouvement d'un fluide

1.1. Description lagrangienne

La description lagrangienne est celle utilisée en mécanique du point ou du solide.

DESCRIPTION LAGRANGIENNE

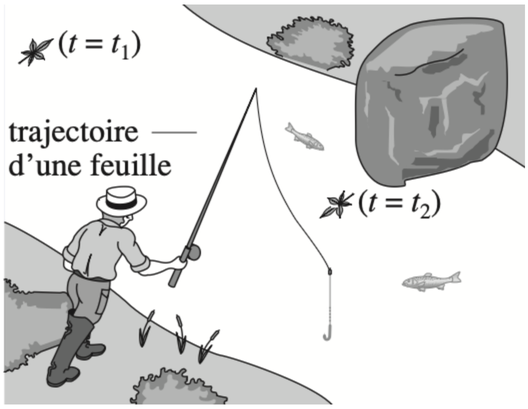
L'**approche lagrangienne** consiste à choisir des particules fluides P_1, P_2, P_3… et à les suivre tout au long de leur mouvement.

Les grandeurs physiques associées à chaque particule de fluide sont des fonctions d'une seule variable, le temps.

Le mouvement du fluide est défini par les vecteurs position $\overrightarrow{OP_k}(t)$ de chaque particule de fluide à l'instant t et le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P_k}}(t) = d\overrightarrow{OP_k}(t)/dt$.

Exemple 1 : Le pêcheur

Au bord d'une rivière, un pêcheur à la ligne regardant dériver au fil du courant une feuille à la surface de l'eau, se place implicitement dans la conception lagrangienne.

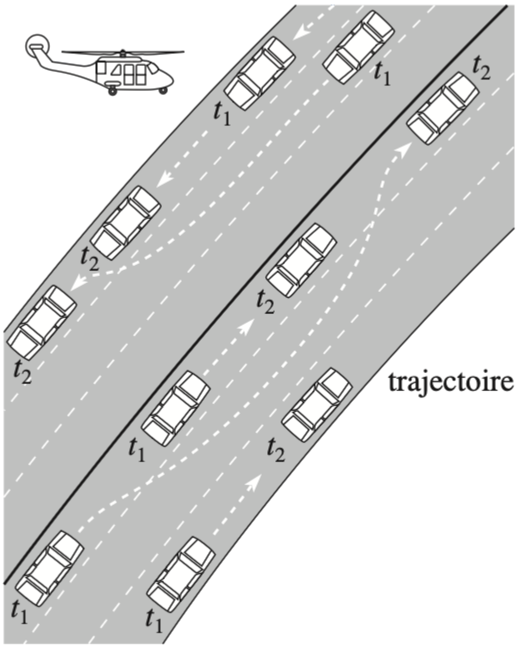


Exemple 2 : Trafic autoroutier

Lors d'un écoulement de véhicules sur une autoroute, il est possible de décrire l'écoulement du trafic grâce à la connaissance de la trajectoire de chacun des véhicules.

On observe par exemple la trajectoire d'un véhicule particulier entre les instants t_1 et t_2.

A chaque véhicule on assigne un vecteur position $\overrightarrow{OM_i}(t)$ et un vecteur vitesse $\vec{V_i}(t)$. Cet ensemble des vitesses ne dépend explicitement que du temps.



1.2. Description eulérienne

DESCRIPTION EULERIENNE

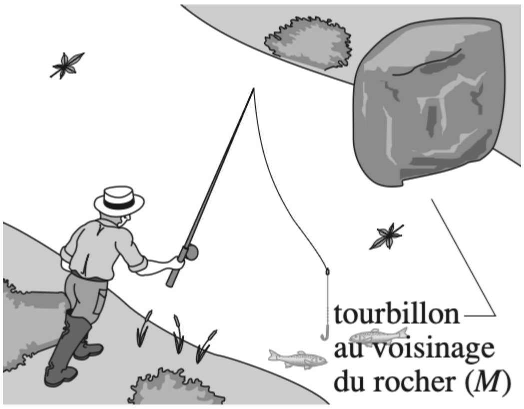
L'**approche eulérienne** consiste au contraire à choisir un volume élémentaire situé dans le voisinage de points fixes M_1, M_2, M_3… et à enregistrer les caractéristiques des particules de fluide qui y passent au cours du temps.

Les grandeurs physiques sont des champs, dépendant des coordonnées d'espace et du temps.

On parle du champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$, du champ de pression $P(M,t)$, du champ de température $T(M,t)$

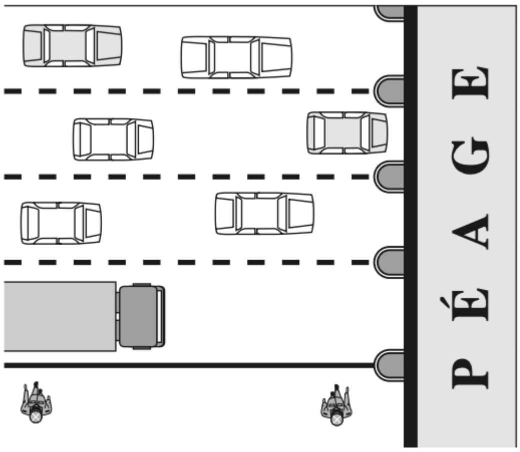
Exemple 1 : Le pêcheur

Le pêcheur observe un tourbillon évoluer au voisinage d'un rocher qui émerge au milieu de la rivière, ne s'intéresse qu'à l'écoulement en un point particulier de l'espace. Il observe la vitesse des particules en un point donné de l'espace au cours du temps. Il ne s'intéresse plus à une particule de fluide qu'il suit dans son mouvement mais plutôt à un point particulier de l'espace où transitent sans cesse de nouvelles particules de fluide. Il se place alors dans un formalisme eulérien. Il n'y a aucune relation entre les coordonnées de ce point et le temps.



Exemple 2 : Trafic autoroutier

Parfois des gendarmes au bord d'une autoroute « observent » la vitesse des véhicules. Ils peuvent décrire l'écoulement du trafic au cours du temps grâce à la connaissance de la vitesse des véhicules existant à l'endroit où ils sont postés. Ces gendarmes se placent en formalisme eulérien pour décrire l'écoulement du trafic. Quand leur point de vue devient lagrangien, c'est généralement mauvais signe !



1.3. Régime stationnaire

Un écoulement est dit **stationnaire** si les champs eulériens (scalaires ou vectoriels) associés au fluide (vitesse, pression, température...) sont **indépendants du temps**.

<u>Ne pas confondre</u> :

- En régime stationnaire le champ des vitesses est indépendant du temps.

$$\vec{v} = \vec{v}(M)$$

- Lorsqu'un champ de vitesse est uniforme, les vitesses sont identiques en tout point de l'espace mais potentiellement variables dans le temps.

$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

1.4. Représentation du champ des vitesses d'un écoulement stationnaire

Lignes de courant

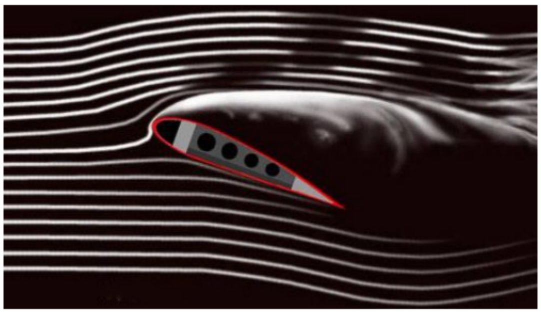
À un instant t fixé, une **ligne de courant** d'un écoulement est une courbe tangente en tout point M au champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$. Elle est orientée dans le sens du champ des vitesses.

Une **carte de champ des vitesses** est une représentation d'un ensemble significatif de lignes de courant.

Exemple : Écoulement autour d'une aile d'avion.

La photo ci-contre représente les lignes de courant d'un écoulement autour d'une profil type aile d'avion.

Dans la zone à l'arrière de l'aile (zone de turbulence), l'écoulement n'est plus stationnaire, les lignes de courant fluctuent au cours du temps.



L'équation d'une ligne de courant, à t fixé, s'obtient en écrivant qu'en tout point M de la courbe, le champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$ est colinéaire au déplacement vectoriel élémentaire d$\overrightarrow{OM}$ le long de la courbe :

$$\vec{v}(M,t) = Kd\overrightarrow{OM}$$

En coordonnées cartésiennes, $\vec{v}(M,t) = K\overrightarrow{dOM}$ conduit à $v_x = Kdx$, $v_y = Kdy$ et $v_z = Kdz$ d'où :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

<u>Exercice</u> :

Soit un écoulement défini par le champ des vitesses défini en coordonnées cartésiennes de la façon suivante :

$$v_x(x,y,z,t) = 2x/\tau \qquad v_y(x,y,z,t) = -v_0 \exp(-t/\theta) \qquad v_z(x,y,z,t) = 0$$

$\vec{v}(M,t) = K\overrightarrow{dOM}$ *conduit à :*

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

$$\frac{dx}{2x/\tau} = \frac{dy}{-v_0 \exp(-t/\theta)} \quad et \quad dz = 0$$

La dernière équation conduit à $z = constante$: les lignes de courant sont dans des plans orthogonaux à l'axe Oz.

La première équation, à t fixé, s'intègre en : $y = \frac{\tau v_0}{2} exp(-t/\theta) \ln x + K_1$

Ainsi, à chaque instant, on obtient des lignes de courant en forme de fonctions logarithmiques, qui se distinguent les unes des autres par le choix de la constante K_1.

Tube de courant

À un instant t fixé, un **tube de courant** est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé donné. Le champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$ est donc tangent en tout point M à la surface du tube de courant.

Profil de vitesse

On appelle **profil de vitesse** d'un écoulement interne stationnaire la représentation du champ des vitesses en différents points significatifs d'une section droite de la conduite dans laquelle a lieu l'écoulement.

<u>*Exemples fondamentaux*</u> *:*

- *Écoulement de Couette :*

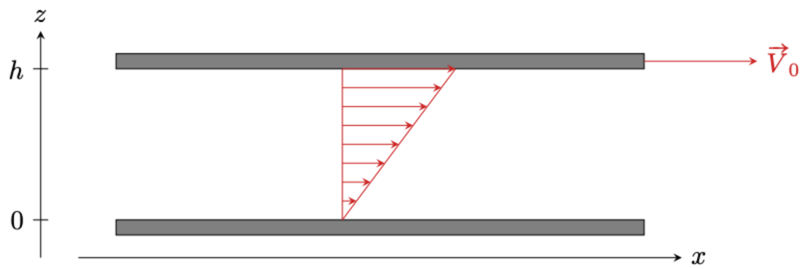
Un écoulement de Couette est un écoulement qui a lieu entre deux plaques en mouvement l'une par rapport à l'autre.

Dans l'écoulement plan étudié ici, les deux plaques sont supposées infinies dans les directions x et y. La plaque supérieure est tirée à la vitesse $\overrightarrow{V_0} = V_0\overrightarrow{e_x}$.

Le champ des vitesses au sein de l'écoulement est donné par :

$$\vec{v}(M) = V_0 \frac{z}{h} \overrightarrow{e_x}$$

Allure des lignes de courant et représentation du profil de vitesse de l'écoulement :



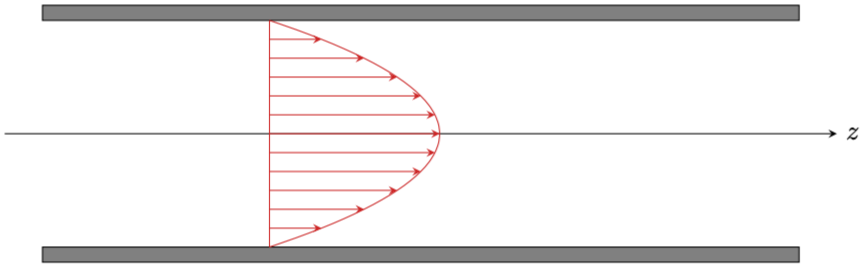
- *Écoulement de Poiseuille*

L'écoulement de Poiseuille est le modèle le plus classique pour décrire un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique de rayon R.

En coordonnées cylindriques, le champ des vitesses au sein de l'écoulement est donné par

$$\vec{v}(M) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \overrightarrow{e_x}$$

Allure des lignes de courant et représentation du profil de vitesse de l'écoulement :



2. Débit d'une grandeur extensive, conservation de la masse

La mécanique des fluides permet d'étudier le transport d'une grandeur donnée (volume, masse...). Pour ce faire, il est nécessaire de définir la notion de débit associée à une telle grandeur.

2.1. Débit massique

Vecteur densité de courant de masse

On peut introduire un vecteur densité de courant associé à la grandeur physique transportée, qui est ici la masse, pour obtenir le vecteur densité de courant de masse :

$$\vec{j}_{masse} = \rho\vec{v}$$

On appelle **débit massique D_m** au travers d'une section S, la masse de fluide qui traverse S par unité de temps.

$$D_m = \iint_S \vec{j}_{masse}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \rho\vec{v}.\overrightarrow{dS}$$

Le débit massique s'exprime en $kg.s^{-1}$.

Le débit massique est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens qui a été choisi pour orienter la surface S.

2.2. Conservation de la masse

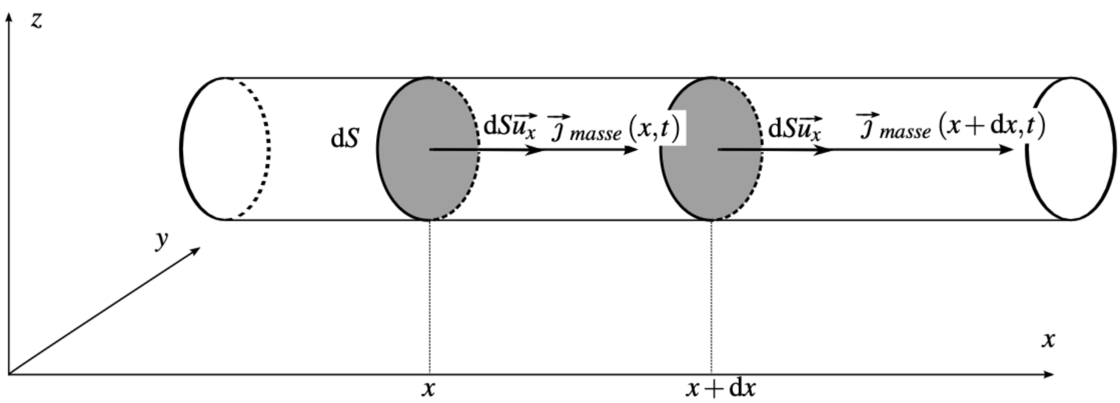
Équation locale de conservation de la masse en 1D

Commençons par une géométrie simple : un écoulement dans une canalisation, en forme de cylindre circulaire.

Le cylindre est supposé fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. On suppose que l'écoulement est unidimensionnel, parallèle aux parois de la canalisation, c'est-à-dire que le champ des vitesses dans $\mathcal{R}$ prend la forme $v(x,t)\,\overrightarrow{u_x}$ en coordonnées cartésiennes.

Pour effectuer un bilan de masse, on considère une surface fermée S, fixe dans $\mathcal{R}$, à travers laquelle le fluide s'écoule. Une telle surface porte le nom de **surface de contrôle**. Le volume qu'elle enferme porte le nom de **volume de contrôle**.

On prend ici comme volume de contrôle le cylindre élémentaire compris entre x et $x + dx$.



Compte tenu de la forme de l'écoulement considéré ici, les échanges de masse ne se font qu'à travers les faces de gauche et de droite ; il n'y a aucun échange à travers la paroi latérale de la surface de contrôle.

La masse qui s'y trouve à l'instant $t + dt$ est égale à celle qui s'y trouvait à l'instant t moins celle qui est sortie à travers les différentes parois pendant dt, plus celle qui est rentrée à travers ces parois pendant dt.

La masse contenue dans le volume de contrôle est :

- $\delta m(x,t) = \rho(x,t) dS dx$ à l'instant t ;
- $\delta m(x,t+dt) = \rho(x,t+dt) dS dx$. à l'instant $t + dt$.

La masse entrant pendant dt à travers la face de gauche est :

- $\vec{J}_{masse}(x,t). \overrightarrow{dS} dt = j_{x\,masse}(x,t) dS dt$.

La masse sortant pendant dt à travers la face de droite est :

- $\vec{J}_{masse}(x+dx,t). \overrightarrow{dS} dt = j_{x\,masse}(x+dx,t) dS dt$.

L'équation locale de conservation de masse s'écrit :

$$\rho(x,t+dt) dS dx = \rho(x,t) dS dx + j_{x\,masse}(x,t) dS dt - j_{x\,masse}(x+dx,t) dS dt$$

$$j_{x\,masse}(x+dx,t) dS dt - j_{x\,masse}(x,t) dS dt + \rho(x,t+dt) dS dx - \rho(x,t) dS dx = 0$$

en se limitant à l'ordre 1 et après simplification par $dSdxdt$:

$$\frac{\partial j_{x\,masse}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = 0$$

ou plus simplement :

$$\boxed{\frac{\partial j_{x\,masse}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Équations de conservation de la masse

On considère un volume de contrôle V, non infinitésimal, délimité par la surface de contrôle S, orientée avec un $\overrightarrow{dS}$ sortant.

L'intégrale $\oiint_S \vec{J}_{\text{masse}} \cdot \overrightarrow{dS}$ représente le flux net sortant de masse à travers la surface.

Elle tient **à la fois compte des flux entrants et sortants** :

- les parties de S où $\vec{J}_{masse}. \overrightarrow{dS} > 0$ correspondent à de la masse qui **sort** ;
- les parties de S où $\vec{J}_{masse}. \overrightarrow{dS} < 0$ correspondent à de la masse qui **entre**.

La masse $m(t+dt)$ contenue dans V à $t+dt$ est égale à la masse $m(t)$ contenue dans V à t moins celle sortant pendant dt à travers S. Ceci se traduit directement par :

$$m(t+dt) = m(t) - \oiint_S \vec{J}_{masse}.\overrightarrow{dS}dt$$

soit encore :

$$\frac{m(t+dt) - m(t)}{dt} = -\oiint_S \vec{J}_{masse}.\overrightarrow{dS}$$

On en déduit à la limite où dt tend vers 0, l'**équation globale (forme intégrale) de conservation de la masse** :

$$\frac{dm}{dt} = -\oiint_S \vec{J}_{masse}.\overrightarrow{dS} = -\oiint_S \rho\vec{v}.\overrightarrow{dS}$$

On peut d'ailleurs partir de cette équation intégrale pour donner une nouvelle démonstration de l'équation locale. L'équation ci-dessus peut encore s'écrire :

$$\iiint_V \rho(x,y,z,t+dt)d\tau = \iiint_V \rho(x,y,z,t)d\tau - \oiint_S \vec{J}_{masse}.\overrightarrow{dS}\,dt$$

soit :

$$\iiint_V \big(\rho(x,y,z,t+dt) - \rho(x,y,z,t)\big)d\tau + \oiint_S \vec{J}_{masse}.\overrightarrow{dS}\,dt = 0$$

puis au 1er ordre en dt :

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau dt + \oiint_S \vec{J}_{masse}.\overrightarrow{dS}\,dt = 0 \qquad \text{soit} \qquad \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau + \oiint_S \vec{J}_{masse}.\overrightarrow{dS} = 0$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau + \iiint_V div\,\vec{J}_{masse}d\tau = 0 \qquad \text{soit} \qquad \iiint_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{J}_{masse}\right)d\tau = 0$$

Cela étant vrai quel que soit V, la fonction intégrée est nulle.

L'**équation locale de conservation de la masse**, ou **équation de continuité**, est :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{J}_{masse} = 0$$

2.3. Débit volumique

On appelle **débit volumique $\boldsymbol{D_v}$** au travers d'une section S, le volume de fluide qui traverse S par unité de temps.

$$D_v = \iint_S \vec{v}.\overrightarrow{dS}$$

Le débit volumique s'exprime en $m^3.s^{-1}$.

Le débit volumique est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens qui a été choisi pour orienter la surface S.

Remarque :

De la même façon que $\vec{J}_{masse} = \rho\vec{v}$, ρ étant la masse volumique, on aurait $\vec{J}_{volume} = 1\vec{v} = \vec{v}$, le 1 représentant le volume volumique.

Le vecteur densité de courant de volume est le champ des vitesses lui-même.

3. Dérivée particulaire

L'opérateur dérivée particulaire donne les variations d'une grandeur scalaire ou vectorielle du fluide en suivant une particule dans son mouvement.

3.1. Première approche : champ de température

Imaginons un individu « sur » une particule de fluide, muni d'une sonde de température. Les variations de température que cet individu va mesurer au cours du temps sont des variations particulaires.

Par rapport à cet observateur, la variation de température sera obtenue par la dérivée particulaire (par rapport au temps) notée :

$$\frac{DT}{Dt}$$

Notons $\vec{v}(M,t)$ le champ eulérien de vitesse au sein du fluide. Prenons pour système la particule de fluide située au point $M(x,y,z)$ à l'instant t. À l'instant $t' = t + dt$, cette particule s'est déplacée de $d\overrightarrow{OM}$ et ses nouvelles coordonnées sont :

$$\begin{cases} x' = x + dx = x + v_x dt \\ y' = y + dy = y + v_y dt \\ z' = z + dz = z + v_z dt \end{cases}$$

La dérivée particulaire de T est alors donnée par l'expression suivante :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{T(x',y',z',t') - T(x,y,z,t)}{dt}$$

Le champ de température dépend de la position de la particule et du temps : $T(M,t) = T(x,y,z,t)$.

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz + \frac{\partial T}{\partial t}dt$$

$$T(x',y',z',t') - T(x,y,z,t) = \frac{\partial T}{\partial x}v_x dt + \frac{\partial T}{\partial y}v_y dt + \frac{\partial T}{\partial z}v_z dt + \frac{\partial T}{\partial t}dt$$

On obtient finalement :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

La somme des 3 derniers termes peut s'écrire de manière plus commode en utilisant un nouvel opérateur, l'opérateur $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})T$$

3.2. Définition de la dérivée particulaire

La **dérivée particulaire** d'un champ scalaire X ou vectoriel $\vec{X}$ correspond à la variation temporelle de ce champ en suivant une particule dans son mouvement. Elle s'écrit :

$$\frac{DX}{Dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})X$$

$$\frac{D\vec{X}}{Dt} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{X}$$

Le terme $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})$ est un **opérateur**. Il faut d'**abord** le calculer explicitement **puis** l'appliquer au champ.

La dérivée particulaire se décompose en :

- $\partial X/\partial t$: **dérivée locale** du champ X. Elle indique un caractère non permanent de X en un point fixe de l'espace, c'est-à-dire sa **variation temporelle**. Ce terme est nul en régime stationnaire.
- $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})X$: **dérivée convective** de X. Elle indique un caractère non uniforme de X, c'est-à-dire sa **variation spatiale**. Ce terme est nul lorsque le champ est uniforme.

3.3. Accélération d'une particule de fluide

Nous disposons maintenant d'un moyen de déterminer l'accélération d'une particule de fluide suivie dans son mouvement, ce qui nous permettra de lui appliquer les lois de la dynamique :

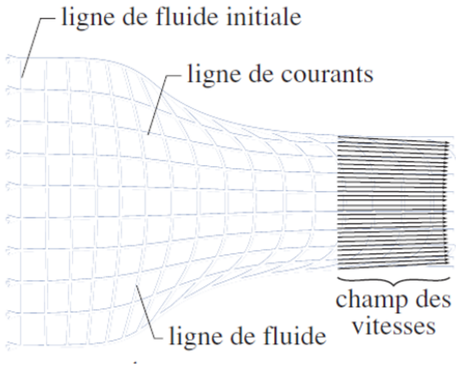
$$\vec{A}_P = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$$

- $\partial \vec{v}/\partial t$: **accélération locale** lorsque le régime n'est pas permanent
- $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$: **accélération convective** lorsque le champ de vitesses n'est pas uniforme

Exemple :

Illustrons le terme convectif par l'exemple d'une rivière, dont le champ des vitesses est représenté ci-contre.

On suppose que le régime est permanent, et que la rivière présente un rétrécissement.



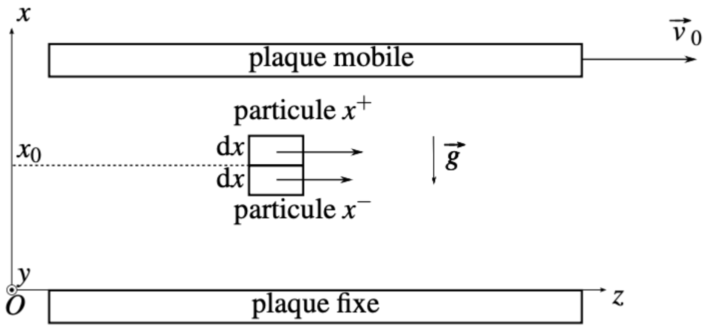
1. *Que peut-on dire de la vitesse des particules de fluide en amont et en aval de la rivière en observant la carte de champ ?*
2. *Démontrer l'observation précédente.*
3. *Écrire l'expression de l'accélération particulaire.*
4. *Que vaut ici l'accélération locale ? L'accélération convective ? Justifier vos réponses et interpréter.*
5. *Montrer que l'accélération particulaire peut également être obtenue à partir de l'expression suivante :*

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v}$$

4. Viscosité

4.1. Force surfacique de viscosité, écoulement de Couette plan

On commence par un écoulement très simple : deux plaques solides, planes, parallèles, sont distantes de a. Celle du bas est fixe dans le référentiel $\mathcal{R} = \{O, x, y, z\}$ du laboratoire ; l'autre est animée d'une vitesse $\vec{v}$ constante, selon $\overrightarrow{u_z}$.



Un fluide, de masse volumique ρ, occupe l'espace entre les deux plaques ; il est mis en mouvement par celles-ci. L'écoulement est homogène, incompressible et stationnaire ; avec des plaques infiniment longues, il est appelé écoulement de Couette plan.

La pression et le champ des vitesses sont invariants par toute translation selon (Oz), du fait du caractère infini des plaques.

Les couches le fluide directement en contact avec les plaques solides sont immobiles par rapport à elles.

Compte tenu des conditions de l'écoulement, le champ des vitesses se met sous la forme :

$$\vec{v}(M,t) = v_z(x,t)\,\overrightarrow{u_z}$$

$v_z(x,t)$ est une fonction croissante de x.

On repère deux particules de fluide voisines, situées de part et d'autre du plan $x = x_0$. Celle se trouvant dans le domaine $x < x_0$ est appelée « particule x^- », et celle se trouvant dans le domaine $x > x_0$, « particule x^+ ».

Loi phénoménologique pour rendre compte des actions de contact entre ces deux particules de fluide, du fait de la viscosité :

- la particule la moins rapide tend à freiner l'autre, de la même façon que la plus rapide tend à entraîner l'autre, donc $\overrightarrow{\delta F}_{x^+ \to x^-}$ est selon $+\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{\delta F}_{x^- \to x^+}$ est selon $-\overrightarrow{u_z}$ (principe des actions réciproques) ;
- la force d'interaction est d'autant plus grande que la différence de vitesse entre les deux particules est plus grande, donc $\delta F_{x^+ \to x^-}$ et $\delta F_{x^- \to x^+}$ sont proportionnelles à $\partial v_z / \partial x$;
- la force, qui s'exerce à travers la surface de contact augmente avec la taille de cette surface, donc $\delta F_{x^+ \to x^-}$ et $\delta F_{x^- \to x^+}$ sont proportionnels à $dS = dydz$;
- la force dépend du fluide choisi, donc on introduit un coefficient η, caractéristique de celui-ci.

L'expérience montre que tous ces points sont assez bien vérifiés pour un grand nombre de fluides qualifiés de newtoniens.

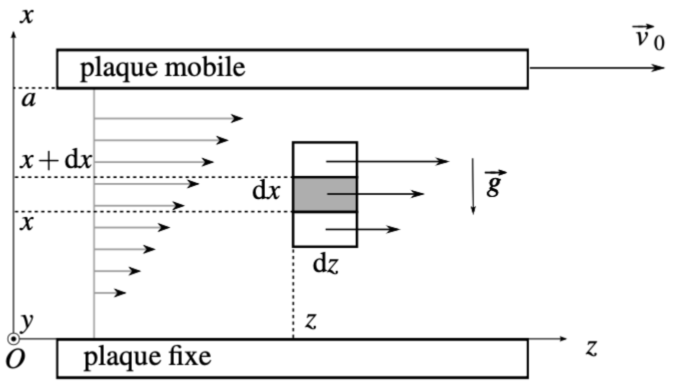
Pour un écoulement parallèle, en géométrie cartésienne, avec $\vec{v}(M,t) = v_z(x,t)\,\overrightarrow{u_z}$, la **force surfacique de viscosité** est :

$$\overrightarrow{\delta F}_{x^- \to x^+} = -\,\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} dydz\,\overrightarrow{u_z} \qquad \overrightarrow{\delta F}_{x^+ \to x^-} = +\,\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} dydz\,\overrightarrow{u_z}$$

La constante η, caractéristique du fluide, se nomme **viscosité dynamique**, son unité est le **poiseuille** Pl, $1\ Pl = 1\ Pa.s$.

Profil de vitesses

L'écoulement étant stationnaire, les trajectoires des particules de fluide sont identiques aux lignes de courant : ce sont des droites parallèles à (Oz). Puisque v_z ne dépend pas de z, chaque particule de fluide garde une vitesse constante au cours de son mouvement. En conséquence, son accélération est nulle.



On prend comme système une particule de fluide, de dimensions dx, dy, dz, située dans le voisinage de M (x, y, z), comme représenté en grisé sur la figure précédente. On la considère comme un point matériel.

Les seules particules qui exercent des forces de viscosité sur celle considérée sont celles qui ont une vitesse différente de la sienne, c'est-à-dire les deux représentées sur la figure en blanc.

Les actions mécaniques qui s'exercent sur la particule de fluide de volume $dxdydz$ choisie comme système sont donc :

- son poids ;
- la résultante des forces de pression ;
- la force de viscosité exercée par la particule au-delà de $x + dx$;
- la force de viscosité exercée par la particule en-deçà de x.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen, il vient :

$$-\rho g dxdydz\,\overrightarrow{u_x} - \overrightarrow{grad}\,P\,dxdydz + \eta\frac{\partial v_z(x+dx)}{\partial x}dydz\,\overrightarrow{u_z} - \eta\frac{\partial v_z(x)}{\partial x}dydz\,\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$$

La pression étant indépendante de z, la projection selon $\overrightarrow{u_z}$ donne :

$$\eta\frac{\partial v_z(x+dx)}{\partial x}dydz - \eta\frac{\partial v_z(x)}{\partial x}dydz = 0$$

d'où

$$\eta\frac{d^2 v_z(x)}{dx^2} = 0$$

puis après une double intégration, $v_z(x) = K_1 x + K_2$.

Les conditions aux limites permettent de déterminer K_1 et K_2 :

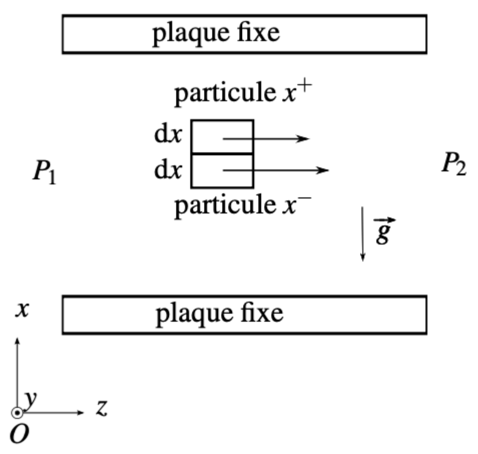
- la condition d'adhérence sur la plaque $x = 0$ permet d'écrire $K_2 = 0$;
- la condition d'adhérence sur la plaque $x = a$ permet d'écrire $K_1 a = v_0$.

Le champ des vitesses entre les deux plaques s'écrit :

$$\boxed{\vec{v}\,(M) = \frac{v_0}{a}x\,\overrightarrow{u_z}}$$

4.2. Écoulement de Poiseuille plan

On considère un écoulement de Poiseuille plan, c'est-à-dire un écoulement homogène et incompressible, entre deux plaques planes parallèles, immobiles.



Cet écoulement, supposé horizontal, est assuré par une différence de pression entre l'entrée (P_1) et la sortie (P_2).

Le champ des vitesses s'écrit :

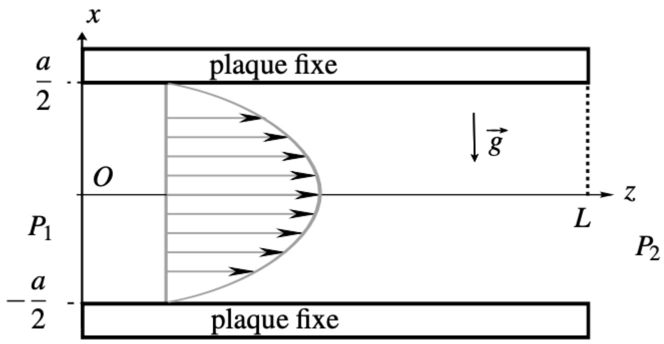
$$\vec{v}(M,t) = v_z(x,t)\,\overrightarrow{u_z}$$

Pour l'expression de la force de viscosité, c'est-à-dire de cisaillement, le contexte est similaire à celui de l'écoulement de Couette plan

$$\overrightarrow{\delta F}_{x^- \to x^+} = -\,\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} dydz\,\overrightarrow{u_z} \qquad \overrightarrow{\delta F}_{x^+ \to x^-} = +\,\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} dydz\,\overrightarrow{u_z}$$

Profil de vitesses

On considère le cas particulier d'un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η.



Le principe fondamental de la dynamique à la particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen, s'écrit :

$$-\,\rho g dxdydz\,\overrightarrow{u_x} - \overrightarrow{grad}\,P\,dxdydz + \eta \frac{\partial v_z(x+dx)}{\partial x} dydz\,\overrightarrow{u_z} - \eta \frac{\partial v_z(x)}{\partial x} dydz\,\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$$

La projection selon $\overrightarrow{u_y}$ de cette équation donne :

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = 0$$

donc

$$P = P(x,z)$$

La projection selon $\overrightarrow{u_x}$ de cette équation donne :

$$\frac{\partial P(x,z)}{\partial x} = -\,\rho g$$

qui s'intègre en

$$P(x,z) = -\,\rho g x + K_3(z)$$

La projection selon $\overrightarrow{u_z}$ de cette équation donne :

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\eta\frac{\partial^2 v_z(x)}{\partial x^2}=0$$

d'où

$$\eta\frac{\partial^2 v_z(x)}{\partial x^2}=\frac{\partial K_3(z)}{\partial z}$$

Cette équation aux dérivées partielles a une forme particulière : le membre de gauche est une fonction de x uniquement, donc est indépendant de z. Le membre de droite est une fonction de z uniquement, donc est indépendant de x.

Finalement, les deux membres sont à la fois indépendant de x et de z et constituent une constante, que l'on note :

$$\frac{\partial K_3(z)}{\partial z}=K_4$$

qui s'intègre en

$$K_3(z)=K_4 z+K_5$$

d'où

$$P(x,z)=-\rho g x+K_4 z+K_5$$

Or, la pression est imposée dans le plan $x=0$ à l'entrée et à la sortie du tunnel de longueur L, d'où $K_5=P_1$ et $K_4 L+P_1=P_2$.

$$\eta\frac{\partial^2 v_z(x)}{\partial x^2}=K_4=\frac{P_2-P_1}{L}$$

$$v_z(x)=\frac{P_2-P_1}{2\eta L}x^2+K_6 x+K_7$$

Si les interfaces fluide-plaque se trouvent en $x=-a/2$ et $x=a/2$, les conditions d'adhérence sur les plaques se traduisent par $v_z(-a/2)=v_z(a/2)=0$ d'où $K_6=0$ et $K_7=(P_1-P_2)a^2/8\eta L$.

Le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}(M)=\frac{(P_1-P_2)(a^2-x^2)}{8\eta L}\overrightarrow{u_z}$$

4.3. Écoulements parfaits ou visqueux

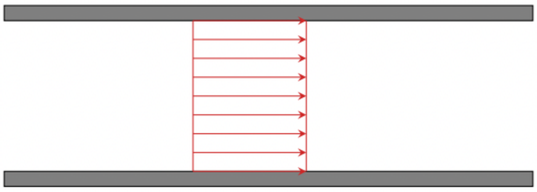
Un écoulement est dit **parfait** si les effets de la viscosité y sont négligeables.

Fluide parfait

On appelle **fluide parfait** un fluide pour lequel $\eta=0$. Il s'agit d'un cas limite théorique, qui n'existe pas en pratique.

Profil de vitesse uniforme sur toute section

Un écoulement parfait dans une conduite se caractérise par un profil de vitesse uniforme sur tout section droite de la conduite.



4.4. Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi solide

Une paroi solide contraint l'écoulement : un fluide ne peut évidemment pas la traverser, ni s'en éloigner puisque cela créerait un vide dans l'écoulement.

En tout point P d'une paroi de normale $\vec{n}$, la vitesse du fluide est tangente à la paroi :

$$\vec{v}(P).\vec{n} = 0$$

En tout point P d'une paroi, la vitesse d'un fluide visqueux est égale à la vitesse de la paroi :

$$\vec{v}(P) = \vec{V}_{paroi}$$

Ce n'est pas le cas dans un écoulement parfait puisque le profil des vitesses est uniforme.

5. Écoulements particuliers

5.1. Écoulements stationnaires

Un **écoulement stationnaire** est un écoulement pour lequel les différents champs eulériens sont indépendants du temps. On peut résumer cela par la notation symbolique :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Particularité d'un écoulement stationnaire

Dans le cadre d'un écoulement stationnaire, l'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$div\, \vec{J}_{masse} = div\, (\rho \vec{v}) = 0$$

Dans un écoulement stationnaire, le vecteur densité de courant de masse est à **flux conservatif**.

Ligne de courant de masse et tube de courant de masse

À un instant t fixé, une ligne de courant de masse est une courbe tangente en tout point M au **vecteur densité de courant de masse** $\vec{J}_{masse}(M,t) = \rho\vec{v}$. Elle est orientée dans le sens du champ $\vec{J}_{masse}(M,t)$.

À un instant t fixé, un **tube de courant de masse** est l'ensemble des lignes de courant de masse s'appuyant sur un contour fermé donné. Le vecteur densité de courant de masse $\vec{J}_{masse}(M,t) = \rho\vec{v}$ est donc tangent en tout point M à la surface du tube de courant de masse.

Conservation du débit massique pour un écoulement stationnaire

Soit S une surface de contrôle. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, la masse de fluide m contenue dans le volume de contrôle V délimité par S, est constante au cours du temps. S'il n'en était pas ainsi, il y aurait accumulation de masse au cours du temps dans V, ou bien au contraire déstockage de masse ; l'écoulement ne pourrait être stationnaire.

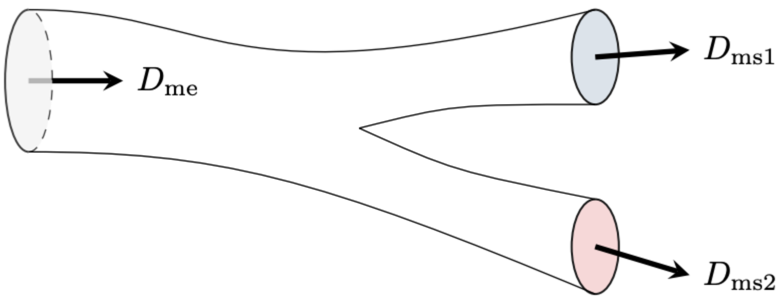
Lorsqu'un écoulement est **stationnaire**, le débit massique entrant D_{me} dans un volume de contrôle, est à tout instant égal au débit massique sortant D_{ms}. Le débit massique est conservé le long d'un tube de courant.

Il y a conservation du débit massique D_m en régime stationnaire.

Si le volume de contrôle possède plusieurs entrée et/ou plusieurs sorties, on peut généraliser :

$$\sum_{entrées} D_{me} = \sum_{sorties} D_{ms}$$

On retrouve une relation type loi des nœuds pour les débits massiques.



5.2. Écoulements homogènes incompressibles, conservation du volume

Un écoulement homogène et incompressible est un écoulement pour lequel la masse volumique du fluide est constante, on dit aussi stationnaire (indépendante du temps) et uniforme (indépendante des coordonnées d'espace) :

$$\forall\, M, \forall\, t, \rho(M,t) = constante$$

On peut aussi écrire :

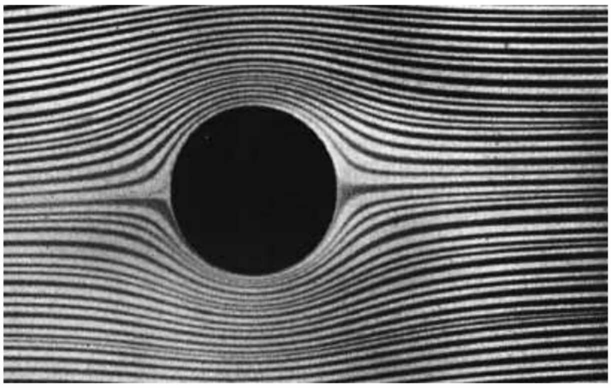
$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Si l'écoulement est incompressible, il y a conservation du débit volumique, $D_v = cte$.

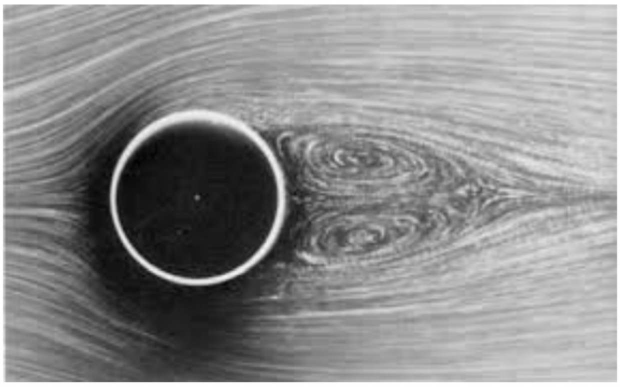
5.3. Écoulement laminaire ou turbulent

Un écoulement est dit **laminaire** lorsqu'il est suffisamment régulier, c'est-à-dire que les différentes couches de fluide se mélangent peu et évoluent de façon globalement parallèle.

Un écoulement est dit **turbulent** lorsqu'il est fluctuant et instable, c'est-à-dire que les différentes couches de fluide s'entremêlent et de nombreux tourbillons se forment.



Écoulement laminaire



Écoulement présentant une zone turbulente

Exemples :

- *Écoulement d'un fleuve, globalement laminaire, ou d'un torrent, globalement turbulent.*
- *Deux zones autour d'un véhicule : laminaire à l'avant, turbulent à l'arrière.*

Critère quantitatif : nombre de Reynolds

Le caractère laminaire ou turbulent d'un écoulement dépend bien sûr de la vitesse d'écoulement, mais aussi des caractéristiques du fluide.

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension défini par :

$$Re = \frac{VD\rho}{\eta}$$

- V une vitesse caractéristique (vitesse débitante) ;
- D une longueur caractéristique (diamètre de la conduite) ;
- ρ la masse volumique du fluide ;
- η la viscosité dynamique du fluide.

Le nombre de Reynolds permet de caractériser qualitativement l'écoulement :

- Si $Re < 10^3$, l'écoulement est laminaire ;
- Si $Re > 10^4$, l'écoulement est turbulent.

5.4. Écoulement incompressible et divergence du champ des vitesses

Divergence d'un champ vectoriel

On appelle **divergence** l'opérateur qui à un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ associe le champ scalaire $div\,\overrightarrow{A}$, donné en coordonnées cartésiennes par :

$$div\,\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

L'opérateur divergence s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ scalaire.

Ne pas confondre gradient et divergence : le gradient s'applique à un champ scalaire f et renvoie le champ vectoriel.

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

Opérateur nabla

Il s'agit d'une notation symbolique, très pratique pour retrouver les expressions des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais attention, pas pour les autres systèmes de coordonnées). Pour l'utiliser, on utilise une notation des vecteurs en matrice colonne : pour un vecteur $\overrightarrow{A}$ quelconque,

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Formellement, l'opérateur nabla peut s'écrire avec des composantes, comme un vecteur, mais qui sont des opérateurs de dérivation :

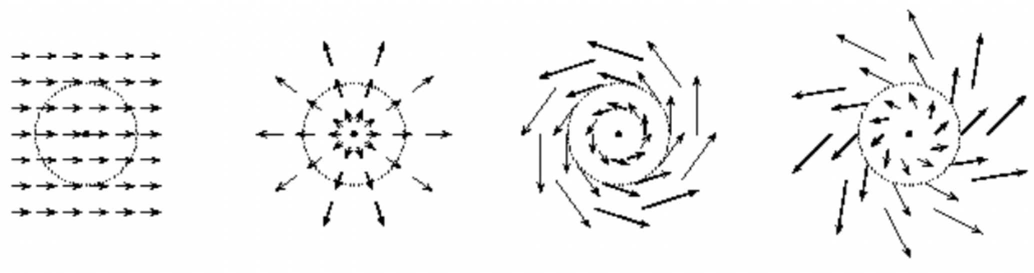
$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On peut écrire : $\overrightarrow{grad}\, f = \overrightarrow{\nabla}.f$ et $div\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}$.

Divergence et lignes de champ

De façon schématique, en un point M autour duquel $\|\overrightarrow{A}\|$ ne varie pas (ou peu),

- si $div\,\overrightarrow{A} > 0$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ divergent ;
- si $div\,\overrightarrow{A} < 0$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ convergent ;
- si $div\,\overrightarrow{A} = 0$, les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$ ne divergent ni ne convergent, mais peuvent être parallèles ou circulaires.



de gauche à droite div $\overrightarrow{A} = 0$, div $\overrightarrow{A} > 0$, div $\overrightarrow{A} = 0$, div $\overrightarrow{A} > 0$

Un écoulement est dit incompressible si toute particule fluide garde une masse volumique constante au cours de l'écoulement ... or les illustrations précédentes laissent entendre que la divergence est reliée aux variations de volume des particules fluides !

La divergence de la vitesse est donc une mesure en chaque point du taux d'accroissement relatif du volume de la particule de fluide au cours du temps.

- $\mathrm{div}\,\vec{v} > 0$: la particule tend à se dilater ;
- $\mathrm{div}\,\vec{v} < 0$: la particule tend à se compresser ;
- $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$: le volume de la particule reste constant.

En tout point d'un écoulement incompressible, la divergence du champ de vitesse est nulle,

$$div\,\vec{v} = 0$$

Exemples :

- *L'écoulement de Couette est-il compressible ? Le champ des vitesses au sein de l'écoulement est donné par :*

$$\vec{v}(M) = V_0 \frac{z}{h} \vec{e_x}$$

$$div\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \frac{z}{h} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

L'écoulement est incompressible.

5.5. Écoulement tourbillonnaire et rotationnel du champ des vitesses

Rotationnel d'un champ vectoriel

On appelle rotationnel l'opérateur qui a un champ vectoriel $\vec{A}$ associe le champ vectoriel $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$, donné avec l'opérateur nabla par :

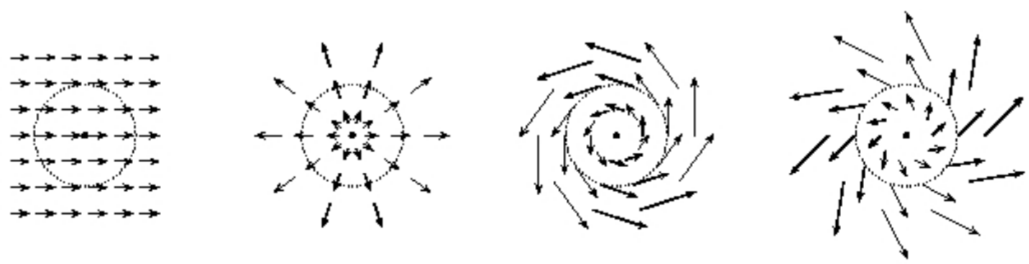
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

L'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel et renvoie un champ vectoriel.

Rotationnel et lignes de champ

De façon schématique, en un point M autour duquel $\|\vec{A}\|$ ne varie pas,

- si $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$, les lignes de champ ne s'enroulent pas : elles sont parallèles ou parfaitement convergentes ou divergentes ;
- si $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} \neq \vec{0}$, les lignes de champ de $\vec{A}$ s'enroulent en sens trigonométrique autour de la direction donnée par $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$.



de gauche à droite $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \neq \vec{0}$ sortant de la feuille

Lien au caractère tourbillonnaire

Un écoulement est dit **tourbillonnaire** ou **rotationnel** si les particules fluides y subissent une rotation sur elles-mêmes. Il est dit **irrotationnel** sinon.

Comme les schémas précédents le laissent penser, la direction et le sens de $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$ indiquent la direction et le sens de rotation de la particule fluide sur elle-même.

En tout point d'un écoulement irrotationnel, le rotationnel du champ de vitesse est nul,

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$$

On appelle **vecteur tourbillon**, et on note $\vec{\Omega}$, le vecteur rotation d'une particule de fluide dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$$

<u>*Exemples*</u> *:*

- *L'écoulement de Couette est-il tourbillonnaire ? Le champ des vitesses au sein de l'écoulement est donné par :*

$$\vec{v}(M) = V_0 \frac{z}{h}\overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_0 \frac{z}{h} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V_0}{h}\overrightarrow{e_y}$$

L'écoulement est tourbillonnaire et les particules de fluide tournent autour de l'axe Oy.

Le vecteur tourbillon est :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\frac{V_0}{h}\overrightarrow{e_y}$$

Écoulement irrotationnel, potentiel des vitesses

Pour un écoulement **irrotationnel**, il existe une fonction scalaire $\phi(M,t)$, appelée potentiel des vitesses, telle que :

$$\vec{v}(M,t) = -\,\overrightarrow{grad}\,\phi(M,t)$$

Le potentiel des vitesses est défini à une fonction du temps près.

<u>*Exemple*</u> *:*

On considère un écoulement irrotationnel ayant un potentiel des vitesses $\phi(M,t) = kx^2 + ky$.

En déduire l'expression du champ de vitesse.

$$\vec{v}(M,t) = -\,\overrightarrow{grad}\,\phi(M,t) = -2kx\overrightarrow{e_x} - k\overrightarrow{e_y}$$