# Espaces euclidiens

## I. Produit scalaire

1) Formes bilinéaires
   1) Définition
      On appelle forme bilinéaire sur E toute application $\varphi$ de E×E dans $\mathbb{R}$
      Telle que :
      Pour tout y de E, l'application x→ $\varphi$(x,y) soit linéaire.
      Pour tout x de E, l'application y→ $\varphi$(x,y) soit linéaire.

   2) Définition
      On appelle forme bilinéaire symétrique sur E, toute forme bilinéaire $\varphi$,
      $\forall(x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

   3) Définition
      Etant donné une forme bilinéaire $\varphi$ sur E, on dit que :
      **La forme $\boldsymbol{\varphi}$ est positive si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$**
      **La forme $\boldsymbol{\varphi}$ est définie si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$**

   4) Définition
      **On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.**
      Exemple :
      L'application : $(\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$, (X,Y)⟶ $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire sur ($\mathbb{R}^n$) appelé le produit scalaire canonique.

      Exercice :
      Montrer que, $\varphi$ : (f,g) ⟶ $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur E=C([a,b], $\mathbb{R}$)

   5) Définition
      **On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.**
      **Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'espace vectoriel euclidien.**

      Remarque : Ces définitions s'adaptent dans le cadre complexe (le produit scalaire est linéaire pour une variable, anti-linéaire pour l'autre) et un espace de dimension finie muni d'un tel produit scalaire s'appelle **Hermitien**.

   6) Norme associée à un produit scalaire
      On appelle norme associée à un produit scalaire noté (.|.) l'application
      E→ $\mathbb{R}$
      x→ $||x|| = \sqrt{(x|x)}$

   7) Distance associée au produit scalaire
      On appelle distance associée à un produit scalaire noté (.|.) l'application
      $E^2 \to \mathbb{R}$, (x,y)→ $||x - y||$

8) Identités remarquables

**Soit (x,y)$\in E^2$ :**

**On a : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)$**

**On a également : $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2-\|y\|^2)$**

*Démonstration : Il suffit de développer $\|x+y\|^2$...*

9) Inégalité de Cauchy-Schwarz

La norme associée au produit scalaire vérifie :$\forall(x,y) \in E^2$ , $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont liés.

*Démonstration :*

*Soit $\varphi(t) = \|x+ty\|^2 = \|y\|^2t^2+2(x,y)t+\|x\|^2$, on reconnaît un trinôme du second degré en t.*

*Or $\|x+ty\|^2 \geq 0$, donc $\Delta = 4(x,y)^2-4\|y\|^2\|x\|^2 = 4((x,y)^2-\|y\|^2\|x\|^2) \leq 0$*

*D'où $|(x,y)| \leq \|y\|\|x\|$*

*De plus $\Delta = 0$ si et seulement si $\|x+ty\|^2=0$ donc pour x et y liés.*

10) Propriétés de la norme

La norme associée à un produit scalaire vérifie :

-la séparation : $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Longrightarrow x=0$

-l'homogénéité : $\forall(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times E, \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

-l'inégalité triangulaire : :$\forall(x,y) \in E^2$ , $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont « positivement » colinéaires (c'est-à-dire : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, tel\ que\ x = \alpha y\ ou\ y = \alpha x$)

11) Propriété dite de la seconde inégalité triangulaire

**Soit (x,y)$\in E^2$ : on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$**

*Démonstration :*

*On a : $(\|x\| - \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|$*

*Et : $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x,y)$*

*Or $(x,y) \leq \|x\|\|y\|$*

*Donc : $\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|$ soit : $\|x-y\|^2 \geq (\|x\| - \|y\|)^2$...*

12) Proposition

La distance associée à un produit scalaire vérifie :

Pour tout (x,y,z) $\in E^3$

-la séparation : $\forall x \in E, d(x,y) = 0 \Longrightarrow x=y$

-la symétrie : d(x,y)=d(y,x)

-l'inégalité triangulaire :$\forall(x,y) \in E^2$ , $d(x,z) \leq d(x,y + d(y,z)$

-la seconde inégalité triangulaire :d(x,z)≥|d(x,y)-d(y,z)|

## II. Expression matricielle d'un produit scalaire

1) Définition

Soit (.|.) un produit scalaire et e=($e_1$ ;... ;$e_n$) une base de E.

On appelle matrice du produit scalaire dans la base e, la matrice

$$M=\begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \cdots & (e_1|e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n|e_1) & \cdots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

2) Théorème

**Soit e=($e_1$ ;… ;$e_n$) une base de E, x et y deux vecteurs de E**

**Soit A=**$\begin{pmatrix} \|\boldsymbol{e_1}\|^2 & \cdots & (\boldsymbol{e_1}|\boldsymbol{e_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{e_n}|\boldsymbol{e_1}) & \cdots & \|\boldsymbol{e_n}\|^2 \end{pmatrix}$

**On note X=$M_e$(x) et Y=$M_e$(y)**

**Alors : (x|y)=$^t$XAY**

*Démonstration : Il suffit de développer $^t$XAY*

Remarque : Pourquoi dans le secondaire, on avait la formule **(x|y)=$^t$XY** ? Tout simplement parce qu'on ne travaillait qu'avec le produit scalaire canonique et donc A=$I_n$

3) Propriétés

Si A désigne la matrice d'un produit scalaire alors :

A est **symétrique** c'est-à-dire : A=$^t$A

A est **positive** c'est-à-dire :$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $^t$XAX $\geq 0$

A est **définie** c'est-à-dire :$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $^t$XAX= 0 ⇒X=0

A est **inversible**

4) Théorème de changement de bases

Soient e et f deux bases de E, soit P=$P_{e\to f}$ la matrice de passage

Alors : $M_f$(.|.)=$^t$P$M_e$(.|.)P

## III. Orthogonalité

Dans cette partie E désigne un espace préhilbertien réel. On note (|) le produit scalaire et ‖ ‖ la norme associée.

1) Définitions

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1

**On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si (x|y) = 0**

**On note alors x⊥y**

2) Théorème de Pythagore

**Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si :**

$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$

*Démonstration :*

*On a : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)$ or (x,y)=0 donc $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$*

3) Définition

On appelle orthogonal d'une partie A de E, l'ensemble $\boldsymbol{A^{\perp}}$**=**$\{x \in \boldsymbol{E}, \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$

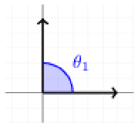
4) Proposition

L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E

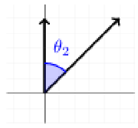
*Démonstration*

*Soit A une partie de E, alors vect$(A)^{\perp}$ = vect($A^{\perp}$) (voir 6)) donc l'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel de E*

Exemples : L'orthogonal de {0} est E, l'orthogonal de E est {0}.



Un angle droit dans l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}_c}\right)$



Un angle droit dans l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{B}}\right)$

5) Proposition
Si A et B sont deux parties de E alors A⊂B⇒ $B^{\perp} \subset A^{\perp}$

*Démonstration :*
*On suppose que A⊂B*
*Soit x∈ $B^{\perp} \Leftrightarrow \forall y \in B, (x,y) = 0$, en particulier $\forall y \in A \subset B, (x,y) = 0$ donc x∈ $A^{\perp}$*

6) Proposition
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, *alors* $\{x_1, \dots, x_n\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)^{\perp}$

*Démonstration :*
*Soit y∈ $\{x_1, \dots, x_n\}^{\perp}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, (y,$x_i$)=0, par linéarité du produit scalaire, $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$, (y,$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i$)=0*
*Donc y∈ Vect$(x_1, \dots, x_n)^{\perp}$, l'autre inclusion est évidente !*

7) Familles orthogonales et orthonormées
   a) Définition
   On appelle famille **orthogonale** de E toute famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.

   On appelle famille **orthonormée** de E toute famille de vecteurs de E unitaires et deux à deux orthogonaux.

   b) Proposition
   Toute famille orthogonale finie de vecteurs **non nuls** de E est libre.
   En particulier, toute famille orthonormée finie de E est libre.

   c) Proposition
   Si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors,
   On a : $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

   *Démonstration: par récurrence sur n et en appliquant le théorème de Pythagore.*

   d) Théorème dit algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

**Soit F=($\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}$) une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée ($\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$) de E telle que $\forall \boldsymbol{p} \in [\![1, n]\!], \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_p}) =$ vect($\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_p}$)**

Exercice : Appliquer le processus d'orthonormalisation à la famille ((1,1) ;(1,0))

Soit u=(1,1) , on pose $f_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{u}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
Soit v=(1,0)
Déterminons v-$p_{vect(f_1)}$(v) = v-(v,$f_1$)$f_1$ =(1,0)- $\frac{1}{2}$(1,1) = ($\frac{1}{2}$,- $\frac{1}{2}$)
Et $f_2$=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, -$\frac{1}{\sqrt{2}}$)
La famille ($f_1$,$f_2$) est orthonormale.

e) Définition
On appelle base orthonormée de E toute base de E qui est une famille orthonormée

f) Théorème
Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

*Démonstration :*
*Si E est euclidien alors E est de dimension finie, et possède donc une base ($e_1$,…,$e_n$)*
*Il suffit d'appliquer le processus d'orthonormalisation de Schmidt…*

g) Proposition
**Soit B=($e_1$,…,$e_n$) une base orthonormée de E.**
**-Si x est un vecteur de E, alors : x = $\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{e_i}$**

-Si x = $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et y= $\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ sont deux vecteurs de E, alors (x|y) = $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
Et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$

*Démonstration : Il suffit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire.*

Etude d'un classique :
On considère E=C([0,1], ℝ) muni du produit scalaire (f,g) = $\int_0^1 f(t)g(t)dt$
Soit F={f∈ $E$, f(0)=0}
Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$
En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

## IV. <u>Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.</u>

Dans cette partie E désigne un espace préhilbertien réel. On note (|) le produit scalaire et ||   || la norme associée.

1) Supplémentaire orthogonal
   a) Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si : $\forall(x, y) \in F \times G, (x|y) = 0$

b) Remarque : l'orthogonalité de F et de G, revient à G $\subset F^{\perp}$ et à F$\subset G^{\perp}$

2) Proposition
**Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé supplémentaire orthogonal de F, et on a donc E= $F \oplus F^{\perp}$**

*Démonstration :*
*Soit x$\in E$, on cherche un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, tel que x=y+z*

*Analyse :*
*Supposons qu'il existe : $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, tel que x=y+z*
*F est de dimension finie, il possède donc une base orthonormée ($e_1$,…,$e_p$)*
*Comme z$\in F^{\perp}$, ($z$,$e_i$) pour tout i entre 1 et p, ainsi ($z$,$e_i$)=0=($x$,$e_i$)-($y$,$e_i$)*

*Or $y = \sum_{i=1}^{p}(e_i, y)e_i = \sum_{i=1}^{p}(e_i, x)e_i$*
*Et $z = x\text{-}y = x\text{-}\sum_{i=1}^{p}(e_i, x)e_i$*
*Ainsi, par construction, si un tel couple existe, il est unique.*

*Synthèse :*
*Soit x$\in E$*
*On pose $y = \sum_{i=1}^{p}(e_i, x)e_i$ et $z = x\text{-}\sum_{i=1}^{p}(e_i, x)e_i$*
*On vérifie que $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, et x=y+z*

3) Propositions
**Si F est un sous-espace d'un espace euclidien E :**
**On a : dim(F)+dim($F^{\perp}$) = dimE**
**De plus: $(F^{\perp})^{\perp}$ = F**

*Démonstration*
*Conséquence directe du 2)*
*De plus : F$\subset (F^{\perp})^{\perp}$ et dim$(F^{\perp})^{\perp}$ = dimE -dim($F^{\perp}$) = dim(F)*
*Donc $(F^{\perp})^{\perp} = F$*

4) Proposition
Soit E de dimension finie n
Soit p$\in [\![0, n]\!]$
Si ($e_1$,…,$e_n$) est une base orthonormée de E, alors ($e_1$,…,$e_p$) et ($e_{p+1}$,…,$e_n$) sont des bases orthonormées de deux supplémentaires orthogonaux.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F et $F^{\perp}$ admettent respectivement ($e_1$,…,$e_p$) et ($e_{p+1}$,…,$e_n$) comme bases orthonormées, alors la famille ($e_1$,…,$e_n$) est une base orthonormée de E.

5) Théorème de la base orthonormée incomplète
Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormée de E.

*Démonstration*
*On combine le théorème de la base incomplète et le procédé d'orthonormalisation.*

6) Projection orthogonale
   a) Définition
   Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E
   On appelle projection orthogonale (ou projecteur orthogonale) sur F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
   L'image d'un vecteur x par cette projection est appelé le projeté orthogonal de x sur F.

   b) Proposition
   Si F=vect($e_1$,…,$e_n$) et x∈E, alors $\forall y \in F, y = p_F(x) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!], (e_i|x-y) = 0$

   *Démonstration :*
   *Le sens direct est évident ! si $y = p_F(x)$, alors x-y = x-$p_F(x) \in F^{\perp}$*

   *Réciproquement :*
   *Si $y \in F$, vérifie $\forall i \in [\![1,p]\!], (e_i|x-y)$ alors x-y$\in F^{\perp}$*
   *Or x=y+(x-y) avec (y,x-y)$\in F \times F^{\perp}$*

   Exemple :
   On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$
   Soit F=vect(1,X)
   Déterminer $p_F(X^2)$

   On a : $p_F(X^2)$ = a+bX
   On a (1,$X^2$-a-bX) = 0 et (X,$X^2$-a-bX) = 0
   Soit a=-1/6 et b=1. D'où : $p_F(X^2)$ = X-$\frac{1}{6}$

   c) Proposition
   **Soit B=($e_1$,…,$e_p$) une base orthonormé d'un sous-espace vectoriel F de E.**
   **Le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E est : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$**

   Exemple : Soit u un vecteur non nul de E, alors ($\frac{u}{\|u\|}$) est une base orthonormée de F=vect(u) et donc : $\forall x \in E, p_F(x) = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}$u

7) Distance à un sous-espace vectoriel
   a) Définition
   Soit X une partie non vide de E et e un point de E, on appelle distance de e à X la quantité d(e,X) = $inf_{x \in X} d(e,x)$

   b) Proposition
   Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie, soit $p_F$ la projection orthogonale sur F, et x un vecteur de E.

La distance du vecteur x à F est atteint en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$
**Ainsi : On a d(x,F) = $\|x - p_F(x)\|$. Et : $\forall y \in F, d(x,F) = \|x-y\| \Leftrightarrow y = p_F(x)$**

*Démonstration :*
*Soit $x \in E$ et $y \in F$, on a : $x-y = x- p_F(x) + p_F(x) - y$ avec $(x- p_F(x), p_F(x)-y) = 0$*
*D'après le théorème de Pythagore : $\|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 + \|y-p_F(x)\|^2$*
*Donc $\|x-y\|^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2$*
*Et d(x,F) $\geq \|x-p_F(x)\|$ or d(x,F) $\leq \|x-p_F(x)\|$*
*Finalement : d(x,F) = $\|x-p_F(x)\|$*

Etude d'un exercice :
1) Soit E un espace euclidien, F sev de E et $x \in E$, montrer que
   $\|u-p_F(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2$
2) Calculer $inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-a-bt)^2 dt$

Il s'agit du théorème de Pythagore : $\|u\|^2 = \|u-p_F(u)+p_F(u)\|^2$

On a : $inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-a-bt)^2 dt = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2$
Avec F=vect(1,X) et $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$
D'où : $inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-a-bt)^2 dt = \|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2$ par le théorème de Pythagore.
Finalement $inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2-a-bt)^2 dt = \frac{1}{180}$

Etude d'un "Classique"

Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1,\dots,x_p$ des vecteurs de E.

On appelle matrice de Gram la matrice G de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $G_{ij}=(x_i,x_j)$

On note $G(x_1,\dots,x_p)$ le déterminant de cette matrice.

1) Démontrer que $(x_1,\dots,x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1,\dots,x_p)\neq 0$
   Ind. Pour le sens $\Leftarrow$ $G(x_1,\dots,x_p)= 0$
   Alors $\exists \lambda_1 \dots \lambda_p$ non tous nuls tels que : $\forall i \in [\![1 \dots p]\!]$, $(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, x_i)=0$
   D'où $\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\|=0$ et $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0 \dots$

2) On suppose désormais que $(x_1,\dots,x_p)$ est une famille libre, et on note $F=\text{vect}(x_1,\dots,x_p)$
   Soit $x \in E$, démontrer que $d(x,F)^2 = \frac{G(x,x_1,\dots,x_p)}{G(x_1,\dots,x_p)}$

   Ind. Écrire x=u+v avec $(u,v) \in F \times F^{\perp}$, remarquer que d(x,F)=$\|v\|$

   Montrer que $G(x, x_1,\dots,x_p)$ s'exprime en fonction de $G(u, x_1,\dots,x_p)$

   Justifier que $G(u, x_1,\dots,x_p) = 0$, et conclure !