TD Cinématique des fluides

Exercice 1 : Opérateurs vectoriels

1 - Calculer le gradient des champs suivants :

$$f_1(x,y,z) = xy^2 - yz^2 \qquad f_2(x,y,z) = 1 + \frac{y}{x-y} \qquad f_3(x,y,z) = (1+z)\,\mathrm{e}^{-x/a}$$

2 - Calculer la divergence et le rotationnel des champs suivants :

$$\vec{V}_1 = (2xy + z^3)\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + 3xz^2\vec{e}_z \qquad \vec{V}_2 = \sin(xy)\vec{e}_x + \cos(xz)\vec{e}_z \qquad \vec{V_3} = -\omega y\vec{e}_x + 2\omega x\vec{e}_y$$

Champ de vitesse

Exercice 2 : Tornade

Le champ des vitesses au sein d'une tornade peut être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par

$$\vec{v}(r) = \begin{cases} \omega r\,\vec{e}_\theta & \text{si} \quad r \leq a \\ \dfrac{K}{r}\,\vec{e}_\theta & \text{si} \quad r \geq a \end{cases}$$

avec ω et K deux constantes.

1 - Sachant que le champ des vitesses ne présente pas de discontinuité, déterminer K.

2 - Représenter le champ des vitesses en traçant la fonction $v(r)$ puis en traçant quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine. Préciser l'allure des lignes de courant.

3 - Montrer que l'écoulement de l'air est incompressible.

4 - Cet écoulement est-il tourbillonnaire ?

Donnée : en coordonnées cylindriques et pour un champ $\vec{A} = \vec{A}(r)$ ne dépendant que de r,

- ▷ $\operatorname{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r}$
- ▷ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = -\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\,\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\,\vec{e}_z$

Exercice 3 : Houle

La hauteur d'eau de la houle peut être modélisée comme une sinusoïde

$$h = h(x,t) = H\cos(\omega t - kx)$$

associée au champ de vitesse dans l'eau

$$\vec{v}(x,y,z) = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\left[\cos(kx-\omega t)\vec{u}_x + \sin(kx-\omega t)\vec{u}_z\right]$$

où l'axe x est sa direction de propagation et l'axe z un axe vertical ascendant dont l'origine est choisie au niveau moyen de la mer. Par définition, le nombre d'onde k est relié à la longueur d'onde la houle par $k = 2\pi/\lambda$.

1 - De quel type d'onde s'agit-il ? Dans quelle direction se propage-t-elle ?

2 - Représenter graphiquement le champ de vitesse à l'instant $t = 0$ en $x = 0$ (qui correspond au sommet d'une vague), $x = \lambda/4$ et $x = \lambda/2$ (creux d'une vague).

3 - L'écoulement est-il compressible ?

4 - L'écoulement est-il tourbillonnaire ?

Débits

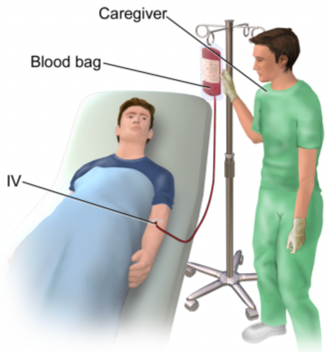
Exercice 4 : Robinet

Lorsque de l'eau coule d'un robinet ouvert, on constate que le diamètre du filet d'eau rétrécit à mesure qu'il s'éloigne du robinet.

1 - Expliquer qualitativement le phénomène.

2 - Des mesures sur une photographie montrent qu'après une chute de 20 cm, le diamètre du jet passe de $d_1 = 78$ pixels à $d_2 = 45$ pixels. En quelle proportion la vitesse a-t-elle varié ?

Exercice 5 : Transfusion sanguine



Cet exercice s'intéresse à une transfusion sanguine, au cours de laquelle du sang stocké dans une poche de 200 mL issue d'un don est injecté en intraveineuse à un patient en une heure. Le sang s'écoule au travers d'un tuyau souple de rayon $b = 2{,}5$ mm au bout duquel se trouve une aiguille horizontale de longueur $\ell = 2{,}0$ cm et de rayon $a = 0{,}15$ mm. Le haut de la poche et supposé à pression atmosphérique P_0 alors que la pression dans la veine est supérieure de $\Delta P = 7$ mbar à la pression atmosphérique. Le sang se comporte comme un fluide newtonien [1] de viscosité $\eta = 1{,}6\,\mathrm{mPa\cdot s}$ et de masse volumique $\rho = 1{,}1\,\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$.

1 - Déterminer le débit volumique Q au travers du dispositif.

2 - Calculer la vitesse débitante dans le tuyau souple et l'aiguille. En déduire une approximation raisonnable à propos du sang se trouvant dans le tuyau, et la nature de l'écoulement dans l'aiguille.

Compte tenu de la question précédente, l'écoulement dans l'aiguille peut être décrit par un profil de Poiseuille : en coordonnées cylindriques,

$$\vec{v} = \frac{a^2}{4\eta\ell}(P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s})(1 - \alpha r^2)\,\vec{e}_z\,,$$

avec P_e et P_s les pressions à l'entrée et la sortie de l'aiguille.

3 - Montrer que $\alpha = 1/a^2$.

4 - Déterminer la différence de pression $P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s}$ nécessaire pour que la transfusion ait le débit voulu.

5 - À quelle hauteur H au dessus du bras du patient la poche doit-elle se trouver ?

1. En réalité, le sang n'est pas un fluide newtonien : sa viscosité dépend des contraintes qu'il subit, et donc en pratique du diamètre du vaisseau au travers duquel il s'écoule. Plus ce diamètre est faible, moins le sang est visqueux : c'est un fluide dit *rhéofluidifiant*.

Exercice 6 : Sténose artérielle

On étudie la circulation sanguine dans une artère, modélisée par un écoulement stationnaire dans un cylindre de longueur $L_0 = 7$ cm et de rayon $R_0 = 0{,}7$ cm. Le sang est modélisé par un fluide newtonien de viscosité $\eta = 6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$. L'écoulement au sein de l'artère a un profil de type Poiseuille : en coordonnées cylindriques,

$$\vec{v} = \frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0}\left(1 - ar^2\right)\vec{e}_z\,,$$

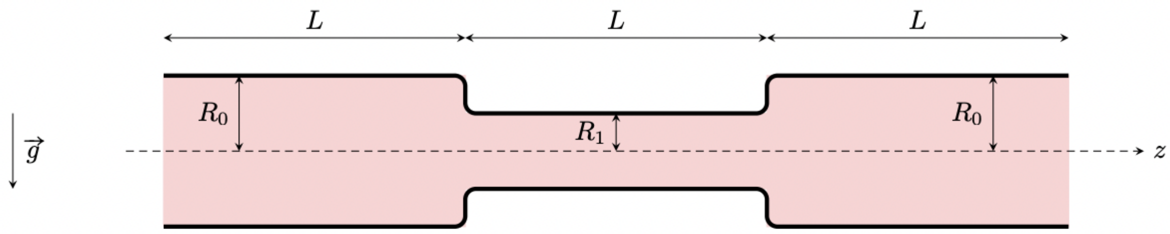
où ΔP est la différence de pression entre les deux extrémités de l'artère. Sa vitesse débitante vaut $U = 10\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

1 - Déterminer a.

2 - En déduire la valeur de ΔP. Quel mécanisme biologique est à l'origine de cette différence de pression ?

3 - On définit la résistance hydraulique de l'artère à partir de la différence de pression et du débit volumique Q par $R_H = \Delta P/Q$. Justifier cette dénomination par analogie avec d'autres phénomènes connus, puis exprimer R_H en fonction des données du problème.

On s'intéresse à une sténose artérielle, dont l'effet est de réduire le rayon de l'artère. On la modélise par la configuration de la figure 3, en prenant $R_1 = R_0/2$.



4 - Déterminer les expressions des résistances hydrauliques R_H d'une section saine de longueur L et R'_H de la portion sténosée. Montrer que la résistance hydraulique de l'artère complète $R_{H,\mathrm{st}} = 2R_H + R'_H$ et la calculer en fonction des paramètres physiques. Quel qualificatif donner à cette configuration ?

5 - Comparer les débits volumiques avec et sans sténose pour l'artère étudiée. Commenter.

Un pontage artériel consiste à créer un écoulement en parallèle de la sténose en utilisant une tubulure de rayon R_2 et de même longueur $3L$ que la sténose afin de retrouver le débit initial.

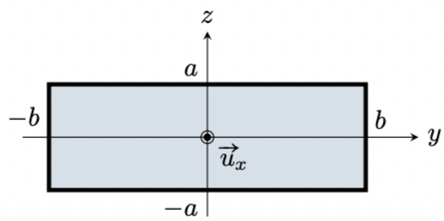
6 - En déduire le rayon R_2 nécessaire pour réaliser ce pontage.

Forces visqueuses

Exercice 7 : Écoulement de Poiseuille plan

Considérons un fluide en écoulement au travers d'une fine conduite rectangulaire, voir figure 1, de hauteur $2a$ selon (Oz), de largeur $2b \gg 2a$ selon (Oy) et de longueur $L \gg 2a, 2b$ selon (Ox). Une surpression ΔP est imposée en $x = 0$, ce qui entraîne un écoulement de fluide. Suffisamment loin de l'entrée de la canalisation, le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = V_{\max}\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)\vec{u}_x\,.$$



1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.

2 - L'écoulement considéré est-il parfait ou visqueux ?

3 - L'écoulement est-il compressible ? Tourbillonnaire ?

4 - Calculer le débit volumique au travers d'une section droite de la conduite.

5 - Montrer que la résultante des forces de viscosité exercées par le fluide sur la conduite vaut

$$\vec{F} = \frac{3\eta L}{a^2} D_V\,\vec{u}_x\,.$$

Exercice 8 : Glissement sur un plan incliné lubrifié

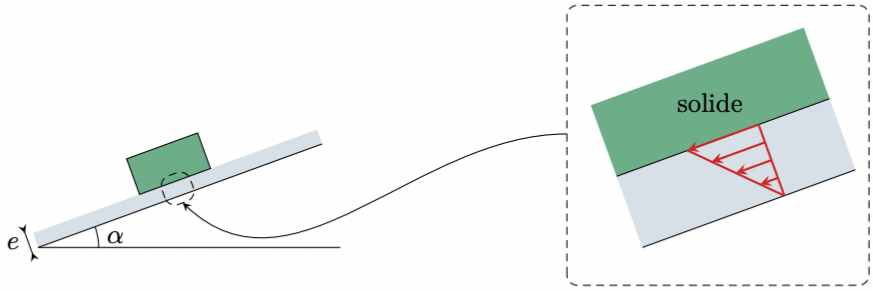
On étudie le glissement d'un solide de masse M sur un plan incliné d'un angle α. Ce plan est lubrifié par une fine couche (épaisseur e constante et uniforme) d'un fluide visqueux (viscosité η) sur laquelle glisse le solide, voir figure 4.

1 - Proposer un paramétrage adapté à la situation.

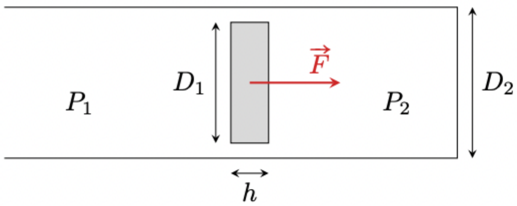
2 - Donner l'expression du champ de vitesse dans la couche de lubrification en fonction de la vitesse V du solide le long du plan incliné.

3 - En déduire l'expression de la force de frottement subie par le solide.

4 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse V du solide et en déduire la vitesse limite qu'il atteint.



Exercice 9 : Déplacement d'un piston à huile



On considère un piston formé d'un cylindre plein (diamètre D_1, épaisseur h) coulissant dans un cylindre creux (diamètre $D_2 > D_1$). Le fluide à l'intérieur du piston est de l'huile de masse volumique μ et de viscosité η. On suppose $P_2 = 2P_1$. Un opérateur appuie de manière quasi-statique sur le piston avec une force F.

1 - Estimer simplement le gradient de pression GP dans l'interstice.

2 - On admet que la vitesse débitante du fluide dans l'interstice s'écrit $v_\mathrm{d} = \alpha\,\mathrm{GP}/\eta$, où α est une constante dépendant uniquement des diamètres. Déterminer le débit volumique de fuite.

3 - Estimer la force de frottement visqueux sur le piston.

4 - En déduire la force que doit exercer l'opérateur pour pouvoir pousser le piston.

Exercice 10 : Démonstration du profil de Poiseuille

Cet exercice s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux (viscosité η) dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R et de longueur L, imposé par une différence de pression ΔP imposée entre les deux extrémités de la conduite. L'écoulement est supposé stationnaire, incompressible et laminaire. Le but de l'exercice est d'établir l'expression du profil de vitesse de l'écoulement.

Donnée : opérateur divergence en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,.$$

1 - Justifier à l'aide des symétries du problème que le champ des vitesses est cherché en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\vec{v}(M) = v_z(r,z)\,\vec{e}_z\,.$$

2 - Montrer que v_z est indépendant de z.

Ce résultat implique que le mouvement de toute particule fluide est rectiligne uniforme. Nous allons étudier le mouvement d'un système fermé (Σ) constitué d'un cylindre de fluide de rayon $r < R$ et de longueur $\mathrm{d}z$ infinitésimale centré sur l'axe de la conduite.

Hypothèses de travail :

- ▷ le poids de (Σ) est négligeable devant les autres actions mécaniques qu'il subit ;
- ▷ le champ de pression p dans la conduite est fonction de z uniquement : $p = p(z)$;

- ▷ le système (Σ) subit des forces de viscosité par le fluide qui l'entoure, données par la loi phénoménologique

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{visq}} = \eta \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\, \mathrm{d}S\, \vec{e}_z$$

avec $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{visq}}$ la force tangentielle subie par un élément de surface $\mathrm{d}S$.

3 - Exprimer la résultante $\mathrm{d}\vec{F}_P$ des forces de pression s'exerçant sur (Σ) en fonction du gradient de pression $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$.

4 - Déterminer la résultante $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{visq}}$ des forces visqueuses s'exerçant sur (Σ) en fonction de $\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}r$.

5 - En déduire que les champs de vitesse et de pression sont reliés par

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,.$$

6 - Montrer à partir de cette équation que le gradient de pression $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ est constant. Donner sa valeur en fonction de ΔP et L.

7 - Identifier une condition limite et déterminer complètement le champ de vitesse.